

Larissa Pires Silva

**Investigação das propriedades dos índices de
desigualdade e da relação entre a
desigualdade e indicadores sociais nos
municípios brasileiros**

Niterói - RJ, Brasil

09 de fevereiro de 2022

Larissa Pires Silva

**Investigação das propriedades dos
índices de desigualdade e da relação
entre a desigualdade e indicadores
sociais nos municípios brasileiros**

Trabalho de Conclusão de Curso

Monografia apresentada para obtenção do grau de Bacharel em
Estatística pela Universidade Federal Fluminense.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Cristina Bessa Moreira

Niterói - RJ, Brasil

09 de fevereiro de 2022

Larissa Pires Silva

**Investigação das propriedades dos índices de
desigualdade e da relação entre a
desigualdade e indicadores sociais nos
municípios brasileiros**

Monografia de Projeto Final de Graduação sob o título “*Investigação das propriedades dos índices de desigualdade e da relação entre a desigualdade e indicadores sociais nos municípios brasileiros*”, defendida por Larissa Pires Silva e aprovada em 09 de fevereiro de 2022, na cidade de Niterói, no Estado do Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Profa. Dra. Maria Cristina Bessa Moreira
Departamento de Estatística – UFF

Profa. Dra. Núbia Karla de Oliveira Almeida
Departamento de Estatística – UFF

Prof. Dr. Rafael Santos Erbisti
Departamento de Estatística – UFF

Niterói, 09 de fevereiro de 2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

S586i Silva, Larissa Pires
Investigação das propriedades dos índices de desigualdade e da relação entre a desigualdade e indicadores sociais nos municípios brasileiros / Larissa Pires Silva ; Maria Cristina Bessa Moreira, orientador. Niterói, 2022.
73 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Estatística)-Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística, Niterói, 2022.

1. Desigualdade social. 2. Fome. 3. Modelo de regressão linear. 4. Razão dos quintos. 5. Produção intelectual. I. Bessa Moreira, Maria Cristina, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD -

Resumo

A fome que se alastra as classes sociais mais baixas do Brasil deturpa os direitos idealistas apresentados na Constituição Federal. Empiricamente, vê-se a violação do direito à propriedade, à segurança, à liberdade, à igualdade e à vida e, tem-se evidenciada a irresponsabilidade estatal. Nesse cenário de ausência de fraternidade, a fome e outros componentes da desigualdade social são expostos. Utilizou-se o Censo 2010 como base de dados primária com o objetivo de investigar a relação entre indicadores sociodemográficos e a desigualdade social nos municípios brasileiros e, também, estudar as discussões existentes na literatura sobre os índices de desigualdade. Para que fosse identificado um limite a partir do qual as análises seriam realizadas, fez-se o uso de modelos de regressão linear simples entre cada variável resposta e a renda *per capita* para que fosse realizada a seleção dos municípios mais ricos que seriam utilizados. Essa separação entre pobres e ricos mostrou-se importante, pois a desigualdade pode ter significados diferentes em sociedades com características econômicas e políticas distintas. Manteve-se então, os cem municípios mais ricos dentre os cinco mil quinhentos e sessenta e quatro considerados pelo Censo e, viu-se a existência de uma limitação ao reflexo positivo da renda *per capita* no bem-estar. A partir do estágio de desassociação entre a renda *per capita* e algumas variáveis, viu-se que a redução da desigualdade foi vantajosa sobre o aumento do bem-estar. Por exemplo, as variáveis taxa de mortalidade infantil, porcentagem de adolescentes que tinham filhos e taxa de mortalidade por homicídios apresentaram relação linear com o índice de Gini, índice de Theil L e a razão de renda sob o nível de significância de 5%. Com relação ao índice de Theil L elas resultaram, respectivamente, nos *p-valores* 0,00093; 0,00154 e 0,0753. Assim, entendendo-se o impacto positivo da redução da desigualdade, expõe-se que o fato dela também afetar os mais ricos poderia coagir a alocação de recursos estatais e privados objetivando o aumento da qualidade de vida dos mais pobres.

Palavras-chave: Desigualdade social. Fome. Modelo de regressão linear. Razão dos quintos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à professora Maria Cristina pelo apoio durante a execução deste trabalho que me acrescentou conhecimentos estatísticos e de vida. Certamente foi um desafio realizá-lo em meio à pandemia, mas valeu a pena. Agradeço também aos professores Rafael e Núbia por comporem a banca.

Também reconheço a participação dos meus pais, irmã, sobrinha, namorado e filhos nesta conquista. Cada um, de sua maneira, contribuiu para que fosse possível finalizar esse ciclo.

Aos amigos que a UFF me proporcionou: Gabriel, Larissa Estudante, Pedro e Maquise, agradeço pelos momentos de distração. E, em especial, a Isabelle pela paciência na minha demora para responder os áudios que me enviava.

Agradeço também aos colegas de trabalho: Amanda, Ana Luisa, Ana Rocha, Andreia, Douglas e Fontenele, que me acolheram como estagiária e contribuiriam para meu crescimento até a contratação. E, indiretamente, estiveram comigo durante esta jornada.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 12
1.1	Motivação	p. 13
1.2	Revisão Bibliográfica	p. 14
1.3	Objetivos	p. 17
1.4	Organização	p. 18
2	Materiais e Métodos	p. 19
2.1	Dados	p. 19
2.1.1	Censo	p. 19
2.1.1.1	Variáveis provenientes do Censo 2010	p. 20
2.1.2	DATASUS	p. 21
2.1.2.1	Variáveis provenientes do DATASUS 2013	p. 21
2.2	Curvas e medidas de desigualdade	p. 22
2.2.1	Parada de Pen	p. 22
2.2.2	Curva dos Quantis	p. 24
2.2.3	Função de Distribuição Acumulada	p. 24
2.2.4	Curva de Lorenz	p. 25
2.2.5	Índice de Gini	p. 26
2.2.6	Razão de Renda	p. 28

2.2.7	Índices de Theil	p. 28
2.2.7.1	Índice de Theil T	p. 30
2.2.7.2	Índice de Theil L	p. 30
2.2.8	Diferenças entre as Curvas de Desigualdade	p. 31
2.3	Modelo de Regressão Linear Simples	p. 32
2.4	Software	p. 38
3	Análise dos Resultados	p. 39
3.1	Resultados teóricos	p. 39
3.1.1	Análise de medidas usuais para a desigualdade	p. 43
3.1.2	Sensibilidade à transferência de renda e invariância sob adições proporcionais	p. 44
3.1.3	Análise das funções de bem-estar associadas a algumas medidas de desigualdade	p. 45
3.1.4	Funções de bem-estar para as quais a medida I é invariante sob adições proporcionais	p. 45
3.2	Resultados da aplicação	p. 46
3.2.1	Análise Descritiva	p. 46
3.2.2	Modelos de regressão	p. 53
4	Conclusões	p. 61
	Referências	p. 62
	Apêndice A – Procedimento de geração dos dados usados nos exemplos	p. 65
	Apêndice B – Cálculos intermediários para o coeficiente de Gini	p. 66
	Apêndice C – Exemplo de cálculo das medidas de desigualdade descritas em Dalton (1920)	p. 68

Apêndice D - Teorema de estatísticas que seguem a distribuição χ^2	p. 69
Apêndice E - Especificações e script das funções utilizadas para a definição dos municípios mais ricos que foram utilizados	p. 70
Apêndice F - Gráficos de dispersão de cada variável explicativa com as medidas de desigualdade	p. 71
Anexo 1 - Considerações sobre $w(x)$	p. 73

Lista de Figuras

1	Parada de Pen para os dados da Tabela 1.	p. 23
2	Curva dos quantis para os dados da Tabela 1.	p. 24
3	Função de distribuição acumulada para os dados da Tabela 1.	p. 25
4	Curva de Lorenz para os dados da Tabela 1.	p. 26
5	Esboço das funções de bem-estar (3.2) e (3.4), respectivamente, com $w(300) = 0$	p. 41
6	Funções de bem-estar associadas às medidas (3.9) a (3.12), para $\mu = 10$, por coluna.	p. 45
7	Gráfico de dispersão das variáveis renda <i>per capita</i> e esperança de vida ao nascer.	p. 47
8	Gráficos de dispersão da variável explicativa renda <i>per capita</i> e variáveis resposta "porcentagem da população que vive em domicílios com banheiro e água encanada" e "taxa de mortalidade infantil", respectivamente.	p. 48
9	Razão dos quintos dos dez municípios mais iguais e desiguais, respectivamente.	p. 51
10	Gráficos de dispersão do índice de Gini e as variáveis porcentagem da população que vive em domicílios com banheiro e água encanada, taxa de envelhecimento e taxa de mortalidade materna, para os 100 municípios mais ricos.	p. 52
11	Gráficos de dispersão da razão de renda com as variáveis porcentagem de extremamente pobres, porcentagem de adolescentes com filhos e anos de estudos, para os 100 municípios mais ricos.	p. 52
12	Gráficos de dispersão do índice de Theil-L com as variáveis esperança de vida, taxa de analfabetismo e taxa de mortalidade materna, para os 100 municípios mais ricos.	p. 53

13	Resíduos estudentizados taxa de mortalidade infantil versus medidas de desigualdade	p. 59
14	Resíduos estudentizados porcentagem de adolescentes que tiveram filhos versus medidas de desigualdade	p. 60
15	Gráficos de dispersão de cada variável resposta com o índice de Gini . .	p. 71
16	Gráficos de dispersão de cada variável resposta com a razão de renda .	p. 72
17	Gráficos de dispersão de cada variável resposta com o índice de Theil .	p. 72

Lista de Tabelas

1	Rendas de indivíduos de uma população fictícia	p. 22
2	Cálculos auxiliares para obtenção do índice de Gini para os dados da Tabela 1	p. 27
3	Variáveis explicativas associadas aos dez municípios mais pobres e ricos	p. 49
4	Medidas de tendência central e de posição de cada variável explicativa .	p. 49
5	Variáveis respostas associadas aos dez municípios mais pobres e ricos .	p. 50
6	Resultados de cada modelo de regressão linear entre as variáveis respostas e a renda <i>per capita</i>	p. 54
7	Resultados de cada modelo de regressão linear entre as variáveis respostas e o índice de Theil-L	p. 55
8	Resultados de cada modelo de regressão linear entre as variáveis respostas e o índice de Gini	p. 56
9	Resultados de cada modelo de regressão linear entre as variáveis respostas e a Razão de Renda	p. 57
10	P-valor do teste de nulidade do coeficiente angular no modelo de regressão linear entre cada variável resposta e cada índice de desigualdade	p. 58
11	Associação entre as somas da proporção acumulada de renda de dois indivíduos sucessivos e as rendas individuais	p. 66

1 Introdução

Em Castro (1984 apud TENDLER, 2006), é exibido o dito por Josué de Castro: "A humanidade se divide em dois grupos, o grupo dos que não comem e o grupo dos que não dormem com receio da revolta dos que não comem". Com base nessa visão, é apresentada a ideia de que o problema da fome existe pela inadequada distribuição do alimento e não por sua ausência, e que a inexistência da aplicação de um plano para a sua resolução é somente uma escolha, pois há estrutura e tecnologia para tal. Segundo Brasília (2009), por exemplo, o Brasil é um dos países que mais desperdiça comida no mundo. Ao longo da cadeia produtiva, a perda inicia-se com más escolhas no momento do plantio e segue até o desperdício do alimento a caminho da comercialização.

A fome somente é vivenciada pelas classes mais baixas da sociedade e compõe o conjunto de fatores que determinam a desigualdade social. Pode-se interpretar essa desigualdade como um limitante para que determinado grupo de indivíduos acesse recursos básicos para seu bem-estar. Por outro lado, a pobreza consiste na carência de bens primários para a sobrevivência de maneira individual e não comparativa.

Atualmente, o Brasil vivencia um processo internacional de integração. Nos aspectos político e econômico, pode-se citar sua participação no BRICS, aliança composta por cinco países emergentes que objetiva transformar seu potencial econômico em hegemonia geopolítica. Já no aspecto cultural, vê-se a absorção de características gastronômicas, musicais e indumentárias de outros países, que podem ser atribuídas à utilização da Internet, a qual existe na maioria dos domicílios urbanos (JOVENS, 2021). Esse processo do qual o Brasil participa pode ser denominado globalização.

Conforme Santos (2003 apud FARIAS, 2010), a globalização pode ser compreendida como a idealização que é difundida para a massa pelos meios de comunicação, a realidade de anseio pelo consumo e crescimento de variáveis sociais negativas e a esperança por um desenvolvimento solidário que valorize a cultura periférica, entendendo seu valor social, econômico e político.

Baseado nessas perspectivas sobre o Brasil, este trabalho beneficia-se de aspectos metodológicos da dimensão da desigualdade social para investigar seu efeito nos municípios brasileiros. Pela definição de desigualdade social e considerando-se alguns trabalhos sobre o tema que foram explicitados na revisão bibliográfica, parte-se da premissa de que seu efeito é negativo. Além disso, observa-se que sua presença no Brasil, país democrático, colapsa com a ideia de igualdade de indivíduos estabelecida pelo Artigo 5º da Constituição Federal do Brasil (1988).

1.1 Motivação

A desigualdade social é um problema histórico que constantemente é reduzido ao fator econômico, considerando somente o poder de compra. Na prática, ela também engloba aspectos educacionais, sanitários, raciais, culturais, habitacionais e alimentares. Embora seja um país democrático, o Brasil explicita suas facetas desiguais. Com frequência, nas grandes metrópoles, comunidades ficam lado a lado às residências de luxo. Apesar da proximidade geográfica, a qualidade de vida e o acesso a recursos básicos é completamente antagônico entre os indivíduos que habitam essas duas esferas.

A sociedade brasileira pode ser decomposta em infraestrutura, que é a base das relações de produção e tem como componentes os trabalhadores, insumos e propriedades físicas; e a superestrutura a qual institui as ideologias religiosas, do Estado, dos meios de comunicação, dentre outras. Há interesse entre os mais abastados financeiramente em manter essa organização, já que ela normalmente está associada à concentração de poder econômico e político. Frequentemente, a imprensa relata casos de exploração do trabalho de indivíduos objetivando o enriquecimento do explorador.

De maneira ostensiva, vêem-se trabalhadores sem a capacidade de comprar o produto final de seu trabalho, pois o valor atribuído é consideravelmente superior ao recebido por sua contribuição no processo. Além disso, muitas vezes os empregados atuam sobre uma parcela específica do produto, não tendo conhecimento sobre o todo, o que pode gerar uma incompreensão sobre sua importância no sistema.

Essa análise empírica sobre o Brasil expõe que, apesar das diferenças cronológica e geográfica, as relações existentes em muito se assemelham aos conceitos e teorias apresentados em Marx (1867 apud HARVEY, 2015). A partir desse entendimento sobre a desigualdade social no país, este trabalho realiza um estudo teórico e aplicado para compreender as consequências de diferentes níveis de desigualdade social e, a partir disso,

apresenta um caminho para o desenvolvimento social do Brasil.

1.2 Revisão Bibliográfica

Nesta seção são apresentados trabalhos encontrados na literatura sobre o tema da desigualdade social.

Em seu trabalho pioneiro, Dalton (1920) apresenta concepções sobre a medição da desigualdade não a expondo como um fator negativo por si mesmo, mas pela restrição do potencial bem-estar econômico promovido pela renda. Sua principal contribuição é afirmar que toda medida de desigualdade está associada a uma função de bem-estar social, propondo um método para a construção de medidas de desigualdade a partir de uma função de bem-estar conhecida analiticamente. Considerando a possibilidade de a função de bem-estar não ser conhecida, o autor analisa se as medidas usualmente utilizadas satisfazem propriedades desejáveis para serem consideradas adequadas à mensuração da desigualdade. As medidas analisadas são: desvio padrão absoluto e relativo (coeficiente de variação), desvio médio absoluto e relativo, coeficiente de Bowley, diferença média absoluta e relativa (coeficiente de Gini).

Atkinson (1970) identifica a função de bem-estar econômico como sendo a função de utilidade, utilizada sob o enfoque bayesiano. Ele critica as medidas obtidas a partir da metodologia proposta por Dalton (1920), que não são insensíveis a transformações lineares da função de bem-estar e propõe uma medida de desigualdade com essa propriedade. Baseado em resultados de outros estudos, ele identifica a forma analítica geral que as funções de bem-estar precisam ter para satisfazer a propriedade de invariância sob adições proporcionais. Esse autor também apresenta em qual situação particular é possível fazer a ordenação da desigualdade de diferentes distribuições de renda, mesmo quando não se conhece a forma analítica da função de bem-estar social e, analisa as seguintes medidas quanto a propriedades desejáveis: variância, coeficiente de variação, desvio médio relativo, índice de Gini e variância dos logaritmos.

Cowell (1998) reuniu as ideias apresentadas nos trabalhos de Dalton (1920) e Atkinson (1970) apresentando-as de maneira mais abrangente e formal e tratou de duas medidas de desigualdade não mencionadas nos dois trabalhos anteriores: o índice de Theil e a razão dos quintos. Esse autor expôs problemas fundamentais existentes na comparação da desigualdade entre diferentes sociedades, assim como analisou outras propriedades desejáveis para medidas de desigualdade, como a investigação sobre a possibilidade do cálculo das

medidas globais a partir do seu cálculo desagregado em subgrupos populacionais.

Em um contexto aplicado, Biggs et al. (2010) estudaram a associação entre o grau de renda nacional, a desigualdade social e a pobreza e seus impactos na saúde pública por meio de análises descritivas e regressões. Em 2008, foram coletados dados entre os anos de 1960 e 2007 de 22 países latino-americanos. Os indicadores de expectativa de vida e mortalidade infantil e o Produto Interno Bruto (PIB) *Per Capita* associado à paridade do poder de compra foram retirados do Banco Mundial de Indicadores de Desenvolvimento; os de tuberculose da Organização Mundial da Saúde; os coeficientes de Gini do Banco Mundial de Desigualdade de Renda e os de pobreza, do Banco de Dados Socioeconômicos da América Latina e Caribe. Com o objetivo de padronizar os países para preservar-se de problemas relacionados ao poder de compra, melhorando a qualidade das comparações entre eles, utilizou-se como medida de pobreza a quantidade de indivíduos em pobreza extrema e, para suavizar os dados faltantes no período de tempo analisado, foi utilizado o artifício das médias móveis de três anos. Além disso, foi aplicado o logaritmo das variáveis mortalidade infantil e do PIB para reparar distorções encontradas em suas distribuições.

Partindo para o entendimento do impacto exercido pelos indicadores econômicos na saúde pública, foram utilizadas análises de regressão que examinaram os países em relação ao tempo. O estudo realizou Testes de Especificação de Hausman para compreender efeitos não observados nas regressões e comparou os resultados obtidos nas estimativas de efeitos fixos e aleatórios. Os modelos com efeitos fixos foram preferidos e concluiu-se que a heterogeneidade dos dados somente afetou algumas das regressões. Na averiguação do efeito da desigualdade e pobreza na saúde pública, estratificou-se os dados a partir de variáveis interanuais e, em paralelo, com as correlações aos pares, viu-se que a pobreza foi estatisticamente significativa para indicadores de saúde pública. Ao relacioná-la com a variável logaritmo da mortalidade infantil, por exemplo, obteve-se p-valor inferior a 0,01 e correlação de 0,64. Esse resultado indica que países com muita pobreza também costumam possuir grande volume de casos de mortalidade infantil. Além disso, pelos resultados encontrados, concluiu-se que o PIB e a pobreza tem uma considerável relação e que funcionam de maneira inversamente proporcional. Contrapondo o esperado, a partir da análise de regressão, encontrou-se que cada aumento de uma unidade no coeficiente de Gini representa um aumento de 0,33 ano na expectativa de vida dos países. Dentre todos, o PIB foi o indicador com maior efeito na saúde pública: ao ano, seu aumento esteve associado ao crescimento da expectativa de vida e à redução da mortalidade infantil. Especificamente, a cada 1% de seu aumento, teve-se o aumento de 0,06 ano e a redução de 1,17%, respectivamente, da expectativa de vida e da mortalidade infantil. Por fim,

o estudo explicitou que as melhorias obtidas na saúde pública a partir da riqueza estão vigorosamente associadas à maneira como a riqueza foi distribuída. Não foram encontradas associações diretas da desigualdade e da pobreza com a saúde, porém suas reduções refletem em ganhos no PIB o qual, por sua vez, impacta diretamente a saúde pública. Concluiu-se então, que o tamanho do PIB nacional é muito importante, mas que não atua de maneira isolada. Inclusive, sua maior porcentagem de explicação foi no indicador de mortalidade infantil, onde foi responsável por aproximadamente 45% das variações. Assim, entende-se que o poder aquisitivo é importante, porém para que os países prosperem nos indicadores de saúde pública utilizados, torna-se necessário que tenham a pobreza e desigualdade reduzidas. Então, finaliza-se com o entendimento de que o rico nem sempre é mais saudável.

Wilkson e Pickett (2015) expuseram as consequências da desigualdade sobre sociedades distintas com características em comum. Essa seleção é considerada, pois a desigualdade pode ter diferentes significados em sociedades com estruturas econômicas, políticas e culturais antagônicas. O estudo foi aplicado para um grupo de países democráticos com altos PIBs e, separadamente, para os estados dos Estados Unidos da América (EUA). Para ambos, utilizou-se um *software* para eleger variáveis sociais que foram utilizadas em análises descritivas, predominantemente centradas em gráficos de dispersão, que explicitaram a alta correlação entre a desigualdade existente nesses territórios e o mal desempenho nos indicadores utilizados. Em paralelo, não se teve indicativos de correlação entre a renda nacional *per capita* e variáveis como a esperança de vida. No caso dos países democráticos, a medição da desigualdade realizada pela razão dos quintos apresentou o quão mais ricos eram os indivíduos 20% mais ricos de cada país em relação aos 20% mais pobres. O Japão foi considerado o país mais igual quanto à distribuição de renda, tendo os ricos 3,4 vezes a renda dos mais pobres, enquanto Singapura explicitou sua desigualdade, com os ricos obtendo 9,7 vezes a renda dos mais pobres. Posteriormente, variáveis sociais como a taxa de homicídio e o desempenho das crianças em matemática e alfabetização foram selecionadas e usadas para a composição de um índice que atribuiu o mesmo peso a cada uma. A partir dele, viu-se a alta correlação entre a razão dos quintos e o índice criado. Os países com mais igualdade na distribuição da renda, como o Japão, apresentaram melhores desempenhos no índice e países desiguais, como a Singapura, piores. Esse fato direcionou os autores à consideração do efeito negativo da desigualdade na sociedade. No estudo, a renda foi apresentada como um fator de suma importância dentro da sociedade, no contexto do *status* social mas que, entre sociedades, não tem todo esse impacto. A partir de determinado patamar econômico, o aumento na renda não representou aumento

no bem-estar dos indivíduos. Esse limite não foi definido exatamente, mas pelas análises descritivas apresentadas vê-se que a partir de uma renda nacional *per capita* de 15 mil dólares, aproximadamente, os indivíduos não têm maior expectativa de vida ou ganho em felicidade. Assim, a alternativa para a melhora na qualidade de vida seria a redução da desigualdade que pode ser alcançada por uma maior igualdade direta das rendas ou pela incisiva cobrança de impostos. Como exemplos de cada uma dessas aplicações tem-se o Japão e a Suécia, respectivamente. Esse estudo sugere, ainda que de maneira informal, a influência no lado psicológico dos indivíduos na manutenção dessa estrutura desigual, o *status* e o ego pesam para que os abastados não queiram modificações. Porém, a análise dos resultados busca expor aos ricos que a maior igualdade também os beneficiaria, apesar de não tanto quanto aos pobres e, também, que a replicação do estudo poderia promover discussões e possíveis reestruturações em outras sociedades.

1.3 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é investigar a relação entre alguns indicadores socio-demográficos e a desigualdade social dos municípios brasileiros, bem como, investigar as discussões existentes na literatura com respeito aos índices de desigualdade. Para esse fim, tem-se a seguir os objetivos específicos:

- estudar os fundamentos e a construção de medidas de desigualdade para que se exponham as semelhanças e dessemelhanças entre elas;
- com base em Wilkson e Pickett (2015), analisar a possível relação entre indicadores sociodemográficos negativos e a desigualdade na distribuição da renda, em nível municipal;
- identificar o limite a partir do qual a análise será realizada, posto que a proposta apresentada por Wilkson e Pickett (2015) aplica-se a unidades geográficas em que o PIB é alto;
- expor as consequências da redução da desigualdade social, utilizando como base primária o Censo 2010

1.4 Organização

A organização deste trabalho está descrita a seguir. No Capítulo 1, tem-se a introdução; no Capítulo 2, encontra-se a descrição da base de dados e os métodos utilizados para sua análise; no Capítulo 3, os resultados obtidos pela aplicação dos métodos aos municípios brasileiros e no Capítulo 4, a conclusão e discussão dos resultados apresentados.

2 Materiais e Métodos

2.1 Dados

Esta seção apresenta as fontes de dados utilizadas neste trabalho. Primeiramente, expõem-se as pesquisas das quais essas foram retiradas. Em seguida, a descrição das variáveis utilizadas nas análises.

2.1.1 Censo

O Censo é um trabalho estatístico realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) que consiste na maior referência que o país tem para obter informações sobre sua população, pois opera em todos os municípios brasileiros e suas localidades. A unidade de coleta é o indivíduo residente no domicílio, na data de referência.

Este trabalho utiliza o Censo Demográfico ao invés da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua, mais conhecida como PNAD Contínua, pois ela não tem o objetivo de coletar efetivamente as informações associadas aos indivíduos de cada domicílio, e sim, fazer a coleta de dados em domicílios selecionados por amostragem conglomerada e, a partir dela, reproduzir os resultados a nível Brasil, Grandes Regiões, Capitais e outros. Além de não ter a desagregação por municípios desejada para este trabalho, certas variáveis de interesse não são coletadas por ela.

Os dados coletados pelo Censo contribuem para a definição de políticas públicas e privadas já que expõem a situação de áreas como educação, saúde e saneamento básico. Este trabalho usa as informações obtidas pelo Censo 2010 realizado entre agosto e outubro do mesmo ano, pois apesar de comumente ser feito a cada 10 anos, ainda é a operação mais recente existente. O Estado alegou falta de verbas para sua realização e desconsiderou a reestruturação promovida pelo IBGE para que o Censo 2020 fosse realizado sob todos os protocolos de segurança necessários com a presença do Covid-19; com um modelo de coleta que utiliza entrevistas telefônicas em localidades que impossibilitem o recenseamento

presencial; além da alternativa do próprio indivíduo fornecer os dados de seu domicílio por meio de um formulário pela internet (GUERRA; RIOS-NETO, 2021).

2.1.1.1 Variáveis provenientes do Censo 2010

- Município: unidade do Estado com diminuta hierarquia sobre o país;
- UF: unidade que engloba aspectos políticos e administrativos e subdivide-se em municípios. Composta pelos 26 Estados e pelo Distrito Federal que é uma unidade soberana que contém a sede dos Três Poderes;
- Esperança de vida ao nascer: número médio de anos de vida esperados para um recém nascido mantido no padrão de mortalidade existente;
- Taxa de analfabetismo: porcentagem da população a partir de 15 anos que não sabe ler e escrever;
- Anos de estudos: média de anos de estudos para indivíduos a partir de 18 anos;
- Taxa de envelhecimento: número de indivíduos a partir de 60 anos por cada 100 indivíduos menores de 15 anos de idade;
- Porcentagem de mães chefes de família, sem fundamental completo e com pelo menos um filho menor de 15 anos de idade;
- Porcentagem de extremamente pobres: percentual do número de indivíduos que vivem com até R\$70,00 de renda domiciliar *per capita* na população;
- Porcentagem de adolescentes que tinham filhos: percentual de mulheres de 10 a 17 anos de idade que tinham filhos vivos nascidos até 31 de julho de 2010;
- Porcentagem da população que vive em domicílios com banheiro e água encanada;
- Porcentagem de pessoas em domicílios com energia elétrica;
- Renda *per capita*: quociente entre o rendimento mensal domiciliar e o número de moradores do domicílio, excluídos pensionistas e empregados domésticos e seus parentes;
- Renda *per capita* média do quinto de indivíduos mais pobre do município;
- Renda *per capita* média do quinto de indivíduos mais rico do município;

- Índice de Theil-L: segunda medida de desigualdade de Theil, mede a desigualdade da distribuição dos indivíduos segundo a renda familiar *per capita*;
- Índice de Gini: Mede o grau de concentração da distribuição do rendimento nominal mensal dos indivíduos maiores de 10 anos com rendimento, ou do rendimento nominal mensal dos domicílios particulares permanentes, com rendimento domiciliar.

A partir da renda *per capita* dos quintos mais rico e mais pobre de indivíduos da unidade considerada, pode-se definir outra medida de desigualdade: a razão dos quintos que é dada pelo quociente entre as duas. Em conjunto com o Índice de Theil, Índice de Gini e a renda *per capita*, essa medida será usada como variável explicativa e as demais variáveis, sinalizadas pelos marcadores pretos, como respostas.

2.1.2 DATASUS

O Departamento de Informática do Sistema Único de Saúde (DATASUS) tem como competência o recolhimento e a manutenção do acervo de dados significativos para o sistema de saúde e de gestão institucional e a implementação de ferramentas de informática que contribuam para a elaboração de sistemas eficientes que integrem as informações de saúde de todo o país. Este trabalho utiliza indicadores obtidos pelo DATASUS no ano de 2013 por ser o mais próximo à sua base primária que é o Censo 2010, os quais foram acessados a partir do Atlas (2021).

Embora estejam disponíveis dados primários mais recentes do DATASUS, a partir dos quais alguns indicadores poderiam ser calculados, observou-se que, em muitos casos, seus valores não coincidiram de forma exata com os valores do IBGE, motivo pelo qual optou-se por usar os dados do último Censo.

2.1.2.1 Variáveis provenientes do DATASUS 2013

- Taxa de mortalidade infantil: número de óbitos de menores de um ano, por mil nascidos vivos;
- Taxa de mortalidade por homicídios: número de óbitos por homicídio, por 100 mil habitantes;
- Taxa de mortalidade materna: número de óbitos de mulheres por causas maternas, por 100 mil habitantes.

2.2 Curvas e medidas de desigualdade

A seguir são apresentadas algumas curvas e medidas encontradas na literatura, usadas para comparar e quantificar a desigualdade de distribuições de renda ou de outras variáveis quantitativas. Cada curva e medida encontra-se exemplificada para um conjunto de rendas fictícias apresentado na Tabela 1 cujo procedimento de geração está descrito no Apêndice A.

Tabela 1: Rendas de indivíduos de uma população fictícia

Indivíduo	Renda
1	5.569,93
2	4.313,60
3	1.155,48
4	807,45
5	382,56
6	361,28
7	348,51
8	25,43
9	17,33
10	6,56
11	5,74
12	0,92
Total	12.994,79

A partir desse ponto do texto, a renda do indivíduo i , onde $i = 1, \dots, N$ é denotada por x_i ; N representa o tamanho populacional; $x_{(i)}$ é a i -ésima menor renda e μ é a renda média da população. Entretanto, para facilitar o entendimento, o exemplo já apresenta as rendas ordenadas crescentemente.

2.2.1 Parada de Pen

Apresentada em Pen (1971), a Parada de Pen surgiu como uma análise da distribuição de renda da Inglaterra e baseia-se na proporcionalidade entre a altura e a renda dos indivíduos. Pessoas com renda igual à renda média são catalogadas com altura média e pessoas com rendas inferiores ou superiores situam-se, respectivamente, com estaturas inferiores e superiores à média. Logo, os pobres são associados fisicamente a anões e os ricos, a gigantes (MEDEIROS, 2012). A altura do indivíduo i é calculada por

$$a_{(i)} = \frac{x_{(i)}}{\mu} \bar{h} \quad (2.1)$$

sendo \bar{h} a altura média da população. A Parada de Pen é um gráfico de colunas centradas em $i * 60/N$ e altura $a_{(i)}$. Ordenando-se os indivíduos de maneira crescente segundo as alturas e colocando-os para marchar a uma mesma velocidade por um período de uma hora, verifica-se, em populações com alta desigualdade de renda, que durante a maior parte do tempo desfilam indivíduos com altura ínfima e, somente próximo ao término dos minutos, vêem-se gigantes.

Para ilustrar a desigualdade de renda da população de exemplificação a partir da Parada de Pen, considerou-se 1,65 metro como altura média. Como modelo, mostrou-se os cálculos da altura dos indivíduos de menor e de maior renda, considerando a renda média de R\$1.082,899 e sob o arredondamento de três casas decimais.

$$a_{(1)} = \frac{0,92}{1.082,899} \times 1,65 = 0,0008495713 \times 1,65 = 0,001$$

$$a_{(12)} = \frac{5.569,93}{1.082,899} \times 1,65 = 5,143535 \times 1,65 = 8,487$$

A Figura 17 mostra a Parada de Pen para os dados da Tabela 1. Observa-se que o primeiro indivíduo tem uma altura tão irrisória que fica oculto no gráfico, porém ao limitar-se as alturas do gráfico, torna-se possível visualizá-lo. No cenário de perfeita igualdade, a conversão das rendas em estaturas resultaria em estatura iguais para todos os indivíduos e, logo, iguais à média aritmética das estaturas. Assim, visualmente, não se teria indivíduos nos extremos de anões e gigantes.

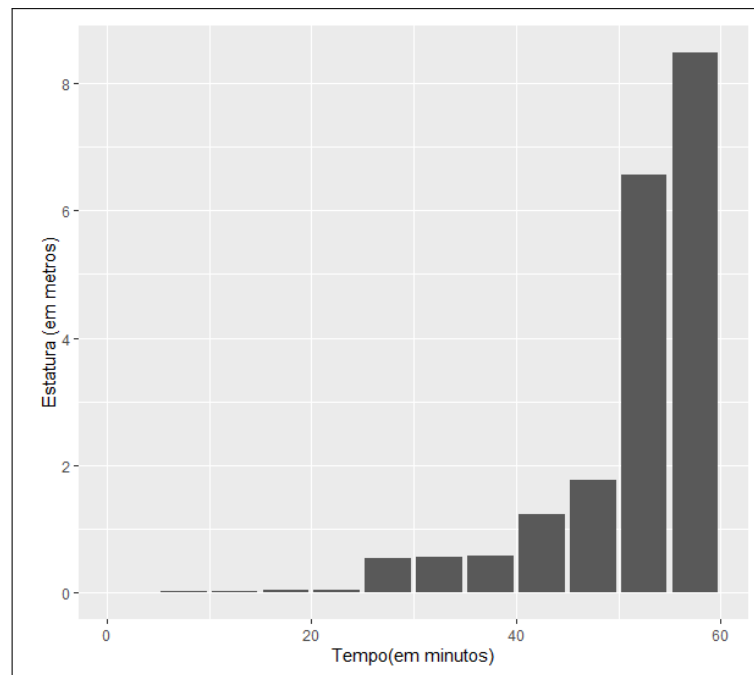


Figura 1: Parada de Pen para os dados da Tabela 1.

2.2.2 Curva dos Quantis

A Curva dos Quantis é uma proposta de estratificação de indivíduos ordenados crescentemente a partir de suas rendas, objetivando a exposição gráfica da distribuição de renda em uma população (MEDEIROS, 2012). Comumente, utiliza-se a renda do último indivíduo de cada quantil. Denota-se o quantil i por P_i e, assim, tem-se a curva formada pelos pontos de coordenadas $\{(0, x_{(1)}), (i/5, P_{20*i})\}$, $i = 1, \dots, 5$, unidos por segmentos de reta, conforme ilustrado na Figura 2 para os dados da Tabela 1. No cenário de perfeita igualdade, a renda do último indivíduo de cada grupo equivaleria proporcionalmente à parcela da população presente no grupo. E, visualmente, teria-se uma reta.

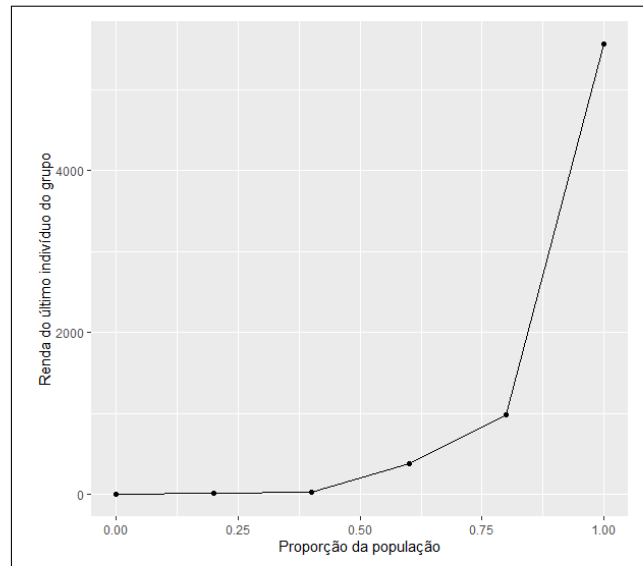


Figura 2: Curva dos quantis para os dados da Tabela 1.

2.2.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada dos rendimentos estabelece a relação entre os rendimentos e frações acumuladas da população, respectivamente, nos eixos horizontal e vertical. A curva explicita a parcela acumulada da população que tem rendimentos inferiores ao seu correspondente ponto no eixo x , conforme apresentado na Figura 3. No cenário de perfeita igualdade, a renda do último indivíduo de cada grupo equivaleria proporcionalmente à parcela da população presente no grupo. E, visualmente, teria-se uma reta.

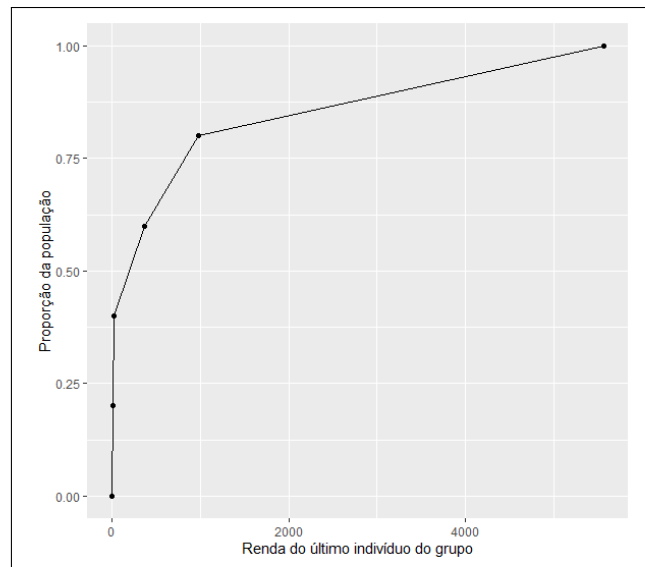


Figura 3: Função de distribuição acumulada para os dados da Tabela 1.

2.2.4 Curva de Lorenz

O conceito analítico que posteriormente ficou denominado como Curva de Lorenz foi proposto por Max Otto Lorenz em 1905. Ela expressa a variação da proporção acumulada da renda em relação à proporção acumulada da população considerando-se a ordenação crescente da renda (HOFFMANN; BOTASSIO; JESUS, 2012).

A proporção acumulada da renda é dada por

$$\phi_i = \frac{1}{N\mu} \sum_{j=1}^i x_{(j)} \quad (2.2)$$

Definindo-se $\phi_0 = 0$, a curva de Lorenz é dada pela linha poligonal formada pelos segmentos de reta que unem os pontos $(i/N; \phi_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$. Essa poligonal aproxima-se de uma curva para valores grandes de N .

A curva de Lorenz é sempre positiva e convexa, mantendo-se entre a reta de perfeita igualdade, a bissetriz, e a reta de extrema desigualdade, formada pela união dos pontos $\{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$. A distribuição de renda torna-se mais igualitária com a proximidade à linha de perfeita igualdade. A Figura 4 mostra a curva de Lorenz aplicada ao exemplo, destacando-se a área de desigualdade, α .

Comparando-se duas distribuições de renda, se uma curva estiver acima da outra em todos os pontos diz-se que ocorre dominância da primeira. Esse conceito foi denominado Dominância de Lorenz. Independentemente da medida de desigualdade utilizada, a

distribuição dominante sempre terá um valor inferior. A dominância não existe quando há interseção entre as duas curvas; nesse cenário, a utilização de diferentes medidas de desigualdades poderá resultar em ordenações distintas.

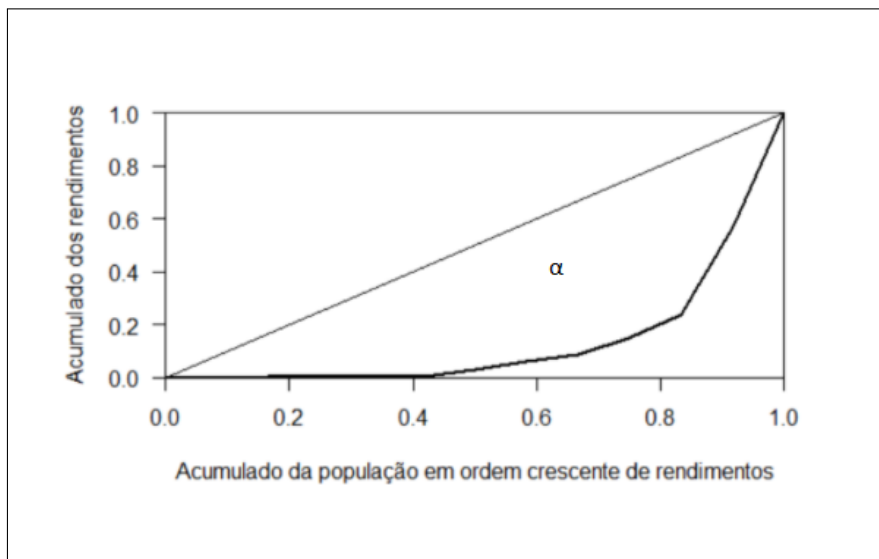


Figura 4: Curva de Lorenz para os dados da Tabela 1.

2.2.5 Índice de Gini

O Índice de Gini é uma medida de concentração de renda em uma população e sinaliza a discrepância entre os rendimentos dos pobres e ricos (HOFFMANN; BOTASSIO; JESUS, 2012). Ele é obtido a partir da curva de Lorenz e estabelecido pelo quociente da área entre a curva de perfeita igualdade e a curva real, denotada por α , e a área entre as curvas de perfeita igualdade e perfeita desigualdade, ou seja,

$$G = \frac{\alpha}{0,5} = 2\alpha \quad (2.3)$$

Sabe-se que $0 \leq \alpha < 0,5$ e que o α_{max} é atingido na situação em que um indivíduo apropria-se de toda a renda e os outros ficam com nada; nesse caso, $\alpha_{max} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{N})$. Logo, $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{N})$. A partir disso, tem-se que $0 \leq G \leq 1 - \frac{1}{N}$.

Definindo-se a área entre o eixo das abscissas e a curva de Lorenz como β , segue que $\alpha + \beta = 0,5$. A área β é formada por trapézios e denota-se a área do i -ésimo trapézio por T_i ; suas bases maior e menor, por ϕ_i e ϕ_{i-1} , respectivamente; e sua altura é igual a $1/N$. Assim,

$$T_i = \frac{1}{2N}(\phi_i + \phi_{i-1}) \quad (2.4)$$

e β é a soma das N áreas T_i , ou seja,

$$\beta = \sum_{i=1}^N T_i = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\phi_i + \phi_{i-1}) \quad (2.5)$$

Pela equação (2.5) e pelo conhecimento de que $\alpha + \beta = 0,5$, tem-se que o Índice de Gini pode ser dado por

$$G = 1 - 2\beta = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\phi_i + \phi_{i-1}) \quad (2.6)$$

A Tabela 2 apresenta os cálculos intermediários para a obtenção do índice de Gini para os dados da Tabela 1. O índice de Gini calculado, com arredondamento para três casas decimais, é 0,725, significando que há uma considerável concentração de renda.

Tabela 2: Cálculos auxiliares para obtenção do índice de Gini para os dados da Tabela 1

i	Renda	i/N	ϕ_i	Renda Acumulada	$\phi_i + \phi_{i-1}$
1	0,92	0,08 $\bar{3}$	7,07976e-05	0,92	7,07976e-05
2	5,74	0,16 $\bar{6}$	0,000512513	6,66	0,000583311
3	6,56	0,250	0,001017331	13,22	0,001529844
4	17,33	0,33 $\bar{3}$	0,002350942	30,55	0,003368273
5	25,43	0,41 $\bar{6}$	0,004307880	55,98	0,006658822
6	348,51	0,500	0,031127090	404,49	0,035434970
7	361,28	0,58 $\bar{3}$	0,058929002	765,77	0,090056092
8	382,56	0,66 $\bar{6}$	0,088368492	1.148,33	0,147297494
9	807,45	0,750	0,150504933	1.955,78	0,238873425
10	1.155,48	0,83 $\bar{3}$	0,239423646	3.111,26	0,389928579
11	4.313,60	0,91 $\bar{6}$	0,571372065	7.424,86	0,810795711
12	5.569,93	1,000	1,000000000	12.994,79	1,571372065

Fonte: Dados gerados pela autora

É mostrado no Apêndice B que esse índice pode ser escrito como

$$G = \frac{\Delta}{2\mu} \quad (2.7)$$

sendo

$$\Delta = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |x_i - x_j| \quad (2.8)$$

A exposição dessa relação leva à visualização de que esse índice considera a diferença de renda para cada par de indivíduos (HOFFMANN; BOTASSIO; JESUS, 2012). Conclui-se, então, que o índice de Gini é uma medida de dispersão relativa já que a diferença absoluta média mede dispersão. Para o exemplo, tem-se que $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |x_i - x_j| = 226.214,10$, $\Delta = 1.570,93125$ e $\mu = 1.082,899167$. Assim, o índice de Gini calculado a partir de (2.7) e (2.8) com três casas decimais é $G = 0,725$, o mesmo valor obtido usando-se (2.6).

2.2.6 Razão de Renda

A razão de renda é definida por

$$R_{\alpha,\beta} = \frac{\text{Renda média dos } \alpha\% \text{ mais ricos}}{\text{Renda média dos } \beta\% \text{ mais pobres}} \quad (2.9)$$

Comumente, são usados $\alpha = \beta = 20$, os quintos superior e inferior, que representam os indivíduos pertencentes ao grupo dos 20% mais ricos e 20% mais pobres da população, respectivamente. Quanto maior $R_{\alpha,\beta}$, maior é a desigualdade de renda entre os extratos estabelecidos.

Para a exemplificação com os dados da Tabela 1, a razão de renda foi calculada utilizando-se $\alpha\% = 1/3$ e $\beta\% = 1/4$ a fim de facilitar o entendimento do desenvolvimento já que a população em questão possui doze indivíduos. Assim,

$$R_{1/3,1/4} = \frac{\frac{5.569,93+4.313,60+1.155,48}{3}}{\frac{0,92+5,74+6,56+17,33}{4}} = \frac{3.679,67}{7,6375} \approx 482$$

cujos alto valor é um indicativo de desigualdade.

2.2.7 Índices de Theil

A teoria de informação trata do "valor da informação" e parte do princípio que a ocorrência de um evento (uma informação) M_i , é tão mais informativa quanto menor a sua probabilidade p_i . O valor da informação associada ao evento M_i é, portanto, uma função de p_i , sendo denotada por $h(p_i)$. Uma mensagem tem valor se a ocorrência do evento não é certa. Logo, a função h deve ser tal que

$$h(p_i = 1) = 0 \quad (2.10)$$

Em contraste, valores pequenos de p_i relacionam-se a mensagens com elevado conteúdo informativo, o qual tende a infinito quando p_i tende a zero. Ou seja, a função h deve também possuir a seguinte propriedade:

$$\lim_{p_i \rightarrow 0} h(p_i) = \infty \quad (2.11)$$

Além disso, sendo M_i e M_j eventos independentes com probabilidades p_i e p_j , a probabilidade de ocorrência dos dois eventos é o produto de suas probabilidades e, nesse caso, a função h deve satisfazer a condição:

$$h(p_i \cdot p_j) = h(p_i) + h(p_j) \quad (2.12)$$

A função matemática que satisfaz as propriedades (2.10), (2.11) e (2.12) é a função logarítmica, e h é definida por

$$h(p_i) = \ln \left(\frac{1}{p_i} \right) = -\ln(p_i) \quad (2.13)$$

Tendo-se N eventos mutuamente exclusivos M_i , $i = 1, 2, \dots, N$, e associada a cada um a probabilidade p_i , com $\sum_{i=1}^N p_i = 1$, tem-se que a esperança do conteúdo informativo da mensagem "o evento M_i foi realizado" é dada por

$$\begin{aligned} H(p) &= E[h(p_i)] = \sum_{i=1}^N p_i h(p_i) = \sum_{i=1}^N p_i \ln \left(\frac{1}{p_i} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^N p_i \ln(p_i) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Quando $p_i = 0$, define-se $p_i \ln(p_i) = 0$ porque $\lim_{p_i \rightarrow 0} p_i \ln(p_i) = 0$. Assim, o mínimo de $H(p)$ é obtido quando todas as probabilidades são nulas, com exceção de uma que assume o valor 1; nesse cenário, $H(p) = 0$. O máximo ocorre quando $p_i = 1/N$, $i = 1, \dots, N$, situação caracterizada pela máxima incerteza. Nesse caso,

$$H(p) = \sum_{i=1}^N p_i \ln \left(\frac{1}{p_i} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \ln(N) = \ln(N) \quad (2.15)$$

Assim, $0 \leq H(p) \leq \ln(N)$. $H(p)$ é denominado entropia da distribuição.

Os índices de Theil para medida da desigualdade são obtidos a partir da expressão (2.15) interpretando-se os N eventos como sendo os elementos populacionais e com p_i igual à renda do indivíduo i dividida pela renda total da população (COWELL, 1998),

isto é,

$$p_i = \frac{x^{(i)}}{N\mu} \quad (2.16)$$

2.2.7.1 Índice de Theil T

Sob a consideração de uma população constituída por N indivíduos que recebem uma propoção p_i da renda total, tem-se o primeiro índice de Theil:

$$T(x) = \ln(N) - H(p) = \sum_{i=1}^N p_i \ln(Np_i) = \frac{1}{N\mu} \sum_{i=1}^N x_i \ln(x_i) - \ln(\mu) \quad (2.17)$$

Theil denominou essa medida de "redundância da distribuição de renda", mas tornou-se comum ela ser chamada de primeira medida de desigualdade de Theil. Esse índice corresponde ao logaritmo da média geométrica ponderada das rendas relativas, o qual utiliza frações da renda para a ponderação. Para a exemplificação, tem-se que $\sum_{i=1}^N x_i \ln(x_i) = 104.294,8739$ e $\mu = 1.082,899167$. Logo, com arredondamento de três casas decimais, $T = 1,039$. A máxima desigualdade é obtida quando $T = \ln(N)$; para o exemplo, $T = 2,485$.

2.2.7.2 Índice de Theil L

Conhecido como "segunda medida de desigualdade de Theil" ou índice L de Theil, é dado por

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \ln\left(\frac{\frac{1}{N}}{p_i}\right) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(Np_i) \quad (2.18)$$

Essa medida representa a esperança do valor informativo de uma mensagem incerta. A função L assume o valor mínimo quando a renda é distribuída de maneira perfeitamente igualitária, ou seja: quando $p_i = \frac{1}{n}$ para todo i tem-se $L = 0$. E, quando $y_i \rightarrow 0$ para algum i , tem-se $L \rightarrow \infty$.

Considerando-se a definição de p_i em 2.16, o índice L pode ser escrito como

$$L = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln\left(\frac{x_i}{\mu}\right) = \ln\left(\frac{\mu}{g}\right) \quad (2.19)$$

sendo

$$\ln(g) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(x_i) \quad (2.20)$$

Logo, a segunda medida de desigualdade de Theil corresponde ao logaritmo natural da média geométrica das rendas relativas somente com a troca do sinal. Para a exemplificação, tem-se que $\sum_{i=1}^{12} \ln(x_i/\mu) = -25,78430493$. Assim, com arredondamento de três casas decimais, $L = 2,149$. Sabendo-se que esse índice atinge seu mínimo no cenário de distribuição de renda perfeitamente igualitária, o resultado sugere que há uma certa desigualdade nos dados.

2.2.8 Diferenças entre as Curvas de Desigualdade

Na literatura, a contextualização da parada de Pen é regularmente utilizada como artifício para o entendimento da curva dos quantis. Contudo, enquanto a primeira utiliza os valores médios como representação dos estratos, a segunda faz uso das separatrizes, ou seja, das divisas entre cada estrato utilizado.

Enquanto a curva dos quantis e parada de Pen apresentam desigualdades absolutas, a curva de Lorenz exibe desigualdades relativas. A utilização de desigualdades absolutas traz empecilhos quando há interesse em comparar a situação da desigualdade em diferentes populações, pois torna-se necessária a consideração da desigualdade entre as populações e dentro delas.

Relacionado à curva de Lorenz, o índice de Gini é muito utilizado em medições de desigualdade de renda, mas é necessário cautela ao utilizá-lo para comparar populações divergentes em aspectos como poder econômico e político, pois ele avalia a distribuição da renda, e não do bem-estar. Tratando-se de municípios, por exemplo, a comparação entre um pobre e um rico pode estar medindo a desigualdade na dimensão material, para o primeiro, e de opulência, para o segundo (BARRETO et al., 2020).

A análise pontual sobre o índice de Gini de uma população pode não ser muito representativa por não considerar a mobilidade de classe e o envelhecimento da população, por exemplo. Um estudo temporal possibilitaria uma visão mais completa sobre esse índice que, por construção, traz a ideia de comparação da concentração de renda entre grupos e não de permanência, como a renda *per capita*.

Como exemplo prático da alienação que o uso do índice de Gini pode gerar ao ser utilizado isoladamente como medidor de desigualdade tem-se sua redução no Brasil do ano de 2019 para o ano de 2020. Apesar da pobreza e insegurança alimentar generalizada que o país vivencia devido a pandemia do Covid-19 e da ineficiência do Estado (IBIRAPITANGA et al., 2021), o índice indicou melhora, pois a distribuição de renda tornou-se

mais igualitária com o Auxílio Emergencial fornecido pelo Estado mediante o impacto negativo sofrido pelo mercado de trabalho (CAPITAL, 2021).

2.3 Modelo de Regressão Linear Simples

Com a finalidade da resolução do objetivo específico de identificação do limite de renda a partir do qual as análises serão realizadas, utilizou-se o modelo de regressão linear simples para a construção do intervalo de confiança do coeficiente angular.

O modelo de regressão linear simples é dado por:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, N$$

sendo

- Y_i é o valor da variável resposta para a i -ésima observação;
- β_0 e β_1 são parâmetros desconhecidos;
- X_i é o valor da variável explicativa para a i -ésima observação;
- ϵ_i é o erro aleatório da i -ésima observação sendo $E(\epsilon_i) = 0$ e $V(\epsilon_i) = \sigma^2$ e, para $i, j = 1, \dots, N$ e $i \neq j$, a covariância de seus respectivos erros é igual a zero, pois ϵ_i e ϵ_j são não relacionados.

Esse modelo tem como característica a linearidade dos parâmetros e da variável explicativa, a qual é única. Como Y_i é composto por parâmetros desconhecidos somado o erro aleatório, ele também é uma variável aleatória (KUTNER et al., 2005). A partir do pressuposto de que $E(\epsilon_i) = 0$, segue-se:

$$E(Y_i) = E(\beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i + E(\epsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i \quad (2.21)$$

A partir disso, tem-se que a função de regressão que explicita o relacionamento entre as médias das distribuições de probabilidade da variável Y dado X para cada nível de X é dada por:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X \quad (2.22)$$

E, devido ao termo de erro ϵ_i , a variabilidade de Y_i ultrapassa ou fica abaixo do valor da função regressora. Como cada erro ϵ_i tem variância constante σ^2 , segue-se que:

$$V(Y_i) = V(\beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i) = 0 + V(\epsilon_i) = \sigma^2 \quad (2.23)$$

Observa-se então que a variabilidade de Y é constante independentemente do nível da variável explicativa, diferentemente de sua média que varia. Além disso, como é assumida a não correlação dos erros e utilizando-se propriedades da covariância, tem-se:

$$COV(Y_i, Y_j) = COV(\beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \beta_0 + \beta_1 X_j + \epsilon_j) = COV(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0 \quad (2.24)$$

Isto é, as respostas Y_i e Y_j também são não correlacionadas. No modelo de regressão, estimam-se os parâmetros desconhecidos, chamados de coeficientes de regressão, para que avalie-se a qualidade do modelo quanto a representação da relação entre as variáveis resposta e explicativa. O coeficiente β_1 é a inclinação da reta de regressão e sinaliza, a cada acréscimo de uma unidade em X , a alteração na média da distribuição de probabilidade de Y . A partir dele, mede-se o efeito da variável explicativa na variável resposta. Por exemplo, quando β_1 é positivo, seu efeito em Y também é positivo.

O coeficiente β_0 é comumente chamado de intercepto e, para $X = 0$, apresenta a média da distribuição de probabilidade de Y . No caso de $X \neq 0$, o intercepto não possui uma usabilidade interpretativa bem definida. Quando a reta de regressão cruza o eixo Y em valores negativos, o β_0 também é negativo.

Com objetivo de estimar essas quantidades desconhecidas, utiliza-se a estimação por mínimos quadrados a qual usa, para cada par de observações (X_i, Y_i) , o desvio de Y_i em relação a seu valor esperado, $E(Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i)$:

$$Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i) \quad (2.25)$$

Esse método de estimação considera a soma dos N desvios quadrados:

$$Q = \sum_{i=1}^N (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 \quad (2.26)$$

A partir dele, os estimadores de β_0 e β_1 , respectivamente, que minimizam a medida Q para uma dada amostra de pares (X_i, Y_i) são $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$. Para tal amostra, as estimativas

de cada um dos estimadores pode ser obtida pelo uso das equações normais:

$$\sum_{i=1}^N Y_i = \sum_{i=1}^N (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i) = N\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^N X_i \quad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^N X_i Y_i = \sum_{i=1}^N X_i (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i) = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^N X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^N X_i^2 \quad (2.28)$$

Ao resolvê-las simultaneamente, tem-se:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2} \quad (2.29)$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^N X_i \right) = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \quad (2.30)$$

sendo \bar{X} e \bar{Y} , respectivamente, as médias das observações X_i e Y_i , $i = 1, \dots, N$. Os estimadores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são não viesados e, dentre os estimadores não viesados, possuem variância mínima. Essa condição é definida pelo Teorema de Gauss-Markov. Matematicamente, ser não viesado implica que:

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0 \quad (2.31)$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \quad (2.32)$$

Além disso, tem-se que $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são combinações lineares das observações da variável resposta, ou seja

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2} = \sum_i^N k_i Y_i \quad (2.33)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = \sum_i^N k_i' Y_i \quad (2.34)$$

sendo $k_i = \frac{X_i - \bar{X}}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}$. O fato de k_i ser constante implica que o estimador $\hat{\beta}_1$ é combinação linear de Y_i e logo, estimador linear. Baseado nesses estimadores da função de regressão dada por:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X \quad (2.35)$$

A função de regressão estimada é dada por:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X \quad (2.36)$$

sendo \hat{Y} o valor estimado da função de regressão para o nível de X , ou seja, o estimador pontual da resposta média. E, assim como os estimadores dos parâmetros, ele é não viesado e tem variância mínima dentre os estimadores não viesados. Assim, para a i -ésima observação tem-se que:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i \quad (2.37)$$

O i -ésimo resíduo é dado por:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i \quad (2.38)$$

Diferentemente dos desvios da função de regressão, os associados à função de regressão estimada são conhecidos e, para a i -ésima observação, representam o desvio da variável resposta da em relação ao seu valor ajustado. Os resíduos da função de regressão estimada seguem propriedades como sua soma é nula e a soma dos valores observados é igual a soma dos valores ajustados.

Para que a variabilidade da distribuição de Y seja compreendida, estima-se a variância do erro ϵ . Seguindo o fundamento da estimação da variância σ^2 em uma amostra de uma determinada população que é dado por:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y})^2}{N - 1} \quad (2.39)$$

sendo $N-1$ o grau de liberdade atrelado a soma dos quadrados. Esse é obtido após a perda de um grau pelo emprego do estimador, Y , da desconhecida média μ da população. Aplica-se então, a mesma lógica para o modelo de regressão, considerando-se que Y_i tem origem em distintas distribuições de probabilidade as quais possuem diferentes médias apoiado em cada valor de X_i . Logo, uma observação Y_i tem seu desvio calculado em torno de sua respectiva média estimada e os desvios tornam-se os resíduos, $Y_i - \hat{Y}_i = e_i$, e, por consequência, a soma residual dos erros quadráticos é dada por:

$$SSE = \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (2.40)$$

Esse valor está associado a $N - 2$ graus de liberdade, sendo que a perda de dois graus está atrelada à utilização dos estimadores e para a obtenção do valor estimado da variável resposta para a i -ésima observação. Desse, segue-se que a média quadrática residual é dado por:

$$s^2 = MSE = \frac{SSE}{N - 2} = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N - 2} = \frac{\sum_{i=1}^N e_i^2}{N - 2} \quad (2.41)$$

O s^2 é um estimador não viesado de σ^2 no caso do modelo de regressão linear simples. E,

quando elevada a meio, torna-se um estimador para o desvio padrão, ou seja, $s = \sqrt{MSE}$. A fim de obter-se inferências sobre os parâmetros β_0 e β_1 , utiliza-se a suposição de que cada ϵ_i é independente e que $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Nesse caso de modelo de regressão linear normal, a distribuição amostral dos estimadores e também é normal e $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)$.

Por meio da estimação por máxima verossimilhança encontra-se os estimadores de β_0 , β_1 e σ^2 que maximizam a função de verossimilhança. Para β_0 , β_1 , os estimadores são os mesmos e possuem as propriedades já explicitadas pela estimação de mínimos quadrados e, além disso, $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ apresentam consistência e suficiência e, $\hat{\sigma}^2$ é não viesado assintoticamente. Segue-se que:

$$\hat{\beta}_1 \sim N \left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2} \right) \quad (2.42)$$

$$\hat{\beta}_0 \sim N \left(\beta_0, \sigma^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2} \right) \right) \quad (2.43)$$

Sabendo-se que $\hat{\beta}_1$ segue a distribuição normal, pode-se gerar uma variável padronizada $(\hat{\beta}_1 - \beta_1)/\sigma(\beta_1)$ e estima-se $\sigma(\beta_1)$ por $s(\beta_1)$. Como o denominador é constituído por um estimador e não o verdadeiro parâmetro, esse é um cenário ao qual se aplica o seguinte teorema da distribuição T-Student: $SSE/\sigma^2 \sim \chi_{(N-2)}^2$. Em consequência desse teorema tem-se que:

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s(\hat{\beta}_1)} \sim T_{(N-2)} \quad (2.44)$$

A demonstração desse resultado pode ser consultada no Apêndice D onde, novamente, vê-se a perda de dois graus de liberdade devido a estimação dos parâmetros β_0 e β_1 .

Utilizando-se o resultado acima é possível construir o intervalo de confiança para β_1 :

$$P(t_{(\alpha/2, N-2)} \leq (\hat{\beta}_1 - \beta_1)/s(\hat{\beta}_1) \leq t_{(\alpha/2, N-2)}) = 1 - \alpha \quad (2.45)$$

Como a distribuição T-Student é simétrica segue-se que:

$$P(\hat{\beta}_1 - t_{(1-\alpha/2, N-2)}s(\hat{\beta}_1) \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t_{(1-\alpha/2, N-2)}s(\hat{\beta}_1)) = 1 - \alpha \quad (2.46)$$

Assim, para qualquer valor de β_1 seu intervalo de confiança é dado por:

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{(1-\alpha/2, N-2)}s(\hat{\beta}_1) \quad (2.47)$$

Sob o mesmo procedimento, para qualquer valor de β_0 seu intervalo de confiança é dado por:

$$\hat{\beta}_0 \pm t_{(1-\alpha/2, N-2)}s(\hat{\beta}_0) \quad (2.48)$$

Quanto à interpretação, o coeficiente angular β_1 é a taxa de variação que tem como unidade de medida o quociente entre as unidades da variável resposta e da variável explicativa. A partir de sua estimativa, compreende-se que a cada uma unidade de aumento na variável explanatória, há um acréscimo ou decréscimo igual ao valor do β_1 na variável resposta. Quando o coeficiente angular é estatisticamente igual a zero, tem-se um indicativo de não dependência da variável resposta com a explicativa. Este trabalho o utilizou com o intuito de identificar a renda *per capita* mínima considerada na análise, a qual determina os municípios que farão parte do estudo.

Analogamente ao intervalo de confiança, utilizou-se o *p-valor* bilateral o qual é construído a partir do cálculo do *p-valor* unilateral $P(t \geq t^*)$, onde t é a estatística de teste e t^* o valor encontrado para a amostra em questão. A partir disso, tem-se o *p-valor* bilateral como o dobro do *p-valor* unilateral e, quando tem valor inferior ao nível de significância definido, conclui-se que há uma relação linear entre as variáveis resposta e explicativa.

O coeficiente de determinação é uma medida descritiva da qualidade do ajuste do modelo e mede a proporção da variação dos dados, em torno de \bar{Y} , explicada pela regressão. Ele é dado por:

$$R^2 = \frac{SSR}{SSTO} = 1 - \frac{SSE}{SSTO} \quad (2.49)$$

onde $SSTO = \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2$ e $SSE = \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2$. Essa estatística R^2 pode assumir valores no intervalo $[0, 1]$, sendo que quanto maior o valor assumido, maior é a parcela da variação de Y explicada pelo modelo de regressão.

2.4 Software

Para a composição das análises e resultados foram utilizados o *Microsoft Excel* (2016) como fonte e manipulação inicial dos dados e posteriormente, a interface RStudio R Core Team (2014) para a análise descritiva e inferências estatísticas realizadas.

3 Análise dos Resultados

3.1 Resultados teóricos

Para o estudo da desigualdade, Dalton (1920) partiu da premissa de que a desigualdade da renda não é ruim por si mesma, mas pela perda de um potencial bem-estar econômico possível de ser obtido por meio da renda. Assim, ele admite a existência de uma função de bem-estar crescente que deve satisfazer três suposições gerais:

1. o bem-estar econômico de indivíduos diferentes é aditivo;
2. a relação entre renda e bem-estar econômico é a mesma para todos os indivíduos;
3. o aumento no bem-estar econômico marginal (de cada indivíduo) decresce quando a renda cresce¹.

De acordo com a suposição (1), sendo x_1, x_2, \dots, x_N as rendas dos indivíduos A_1, A_2, \dots, A_N na população e $w_i(x)$ a função que relaciona a renda da pessoa A_i ao bem-estar econômico por ela proporcionado, o bem-estar total da população, B , é dado por

A segunda igualdade é devida à suposição (2). Assim, para uma dada função de bem-estar $w(x)$, distribuições de renda podem ser ordenadas por meio do resultado de (??). Esse ordenamento não sofre mudança com transformações lineares $w^*(x) = \theta w(x) + \alpha$, sendo $\theta > 0$. No Anexo 1 tem-se algumas considerações sobre a função $w(x)$.

Além da ordenação de distribuições de renda segundo o bem-estar total da população, pode-se desejar quantificar a desigualdade na renda. Para esse fim, Dalton (1920) propôs como medida a razão

$$d = \frac{\sum_{i=1}^N w(x_i)}{Nw(\bar{x}_a)} \quad (3.1)$$

¹Matematicamente, essa suposição implica que a função de bem-estar $w(x)$ é côncava, ou seja, $d^2w(x)/dx^2 < 0$

sendo o numerador o bem-estar da distribuição de renda atual e o denominador, o bem-estar máximo alcançado com a mesma renda total. Considerando-se as três suposições acima, se uma dada renda é distribuída por um número N de pessoas, o bem-estar econômico total será máximo quando todas as rendas forem iguais, isto é, quando $x_i = \bar{x}_a$, a média aritmética das rendas individuais. Assim, esse autor argumenta que toda medida de desigualdade está associada a uma medida de bem-estar econômico.

As três suposições gerais feitas na discussão anterior não são suficientes para que se possa explicitar $w(x)$, sendo necessárias suposições adicionais. A seguir, exemplos apresentados por Dalton, os quais ilustram duas possibilidades.

Exemplo 3.1 *Considere as suposições:*

- i. existe uma renda mínima para a subsistência;*
- ii. para ganhos que excedam a renda mínima para a subsistência, acréscimos proporcionais trazem aumentos iguais ao bem-estar econômico.*

A função que satisfaz essas duas suposições é

$$w(x) = \log(x) + c \quad (3.2)$$

sendo c a constante que define a renda mínima para a subsistência. Assim, pela expressão (3.1), a medida de desigualdade associada à função de bem-estar (3.2) é

$$d = \frac{N \log(\bar{x}_a) + N c}{\sum_{i=1}^N (\log(x_i) + c)} = \frac{\log(\bar{x}_a) + c}{\log(\bar{x}_g) + c} \quad (3.3)$$

sendo \bar{x}_g a média geométrica.

Exemplo 3.2 *Considere as seguintes suposições:*

- 1. existe uma renda mínima a partir da qual aumentos iguais no bem-estar econômico são alcançados com aumentos maiores que aqueles proporcionais à renda;*
- 2. o bem-estar econômico é zero para a renda mínima e assume valores negativos para rendas inferiores ao valor mínimo;*
- 3. quando a renda tende ao infinito, o bem-estar econômico tende a um limite finito.*

Essas suposições são satisfeitas por várias funções, dentre elas

$$w(x) = c - \frac{1}{x} \quad (3.4)$$

sendo $1/c$ o valor a partir do qual a função de bem-estar passa a ser positiva. Pela expressão (3.1), a medida de desigualdade associada à função de bem-estar (3.4) é

$$d = \frac{Nc - \frac{N}{\bar{x}_a}}{\sum_{i=1}^N \left(c - \frac{1}{x_i} \right)} = \frac{c - \frac{1}{\bar{x}_a}}{c - \frac{1}{\bar{x}_h}} \quad (3.5)$$

sendo \bar{x}_h a média harmônica.

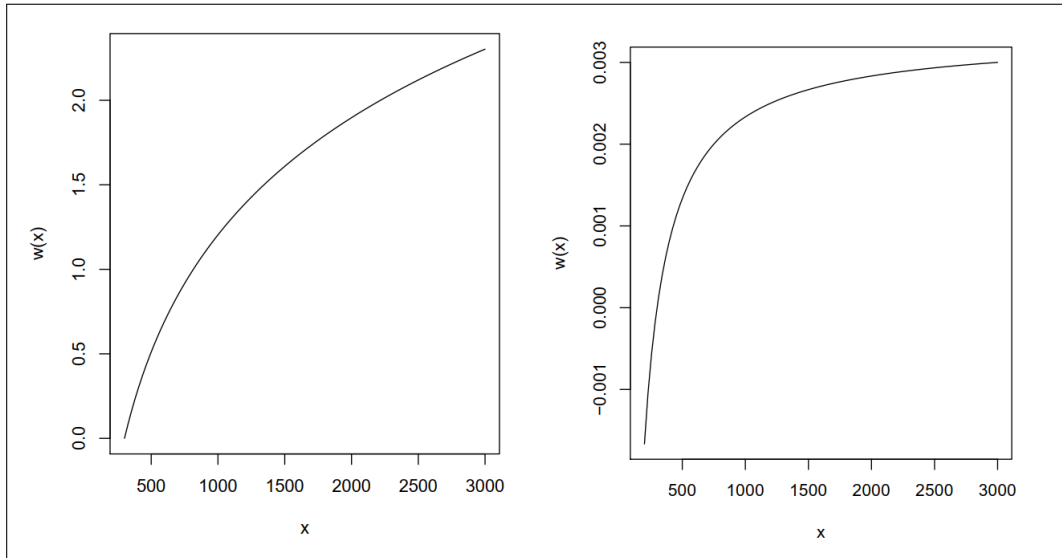


Figura 5: Esboço das funções de bem-estar (3.2) e (3.4), respectivamente, com $w(300) = 0$.

Na Figura 5, o gráfico da função de bem-estar (3.2) mostra que para rendas menores, pequenos acréscimos refletem em significativos aumentos de bem-estar econômico. Por outro lado, para rendas maiores são necessários acréscimos mais significativos de renda para que se obtenha consideráveis variações positivas no bem-estar econômico. Nessa mesma Figura, observa-se no gráfico da função de bem-estar (3.4) que acréscimos proporcionais à renda, produzem aumentos inferiores de bem-estar quando o nível de renda é maior. Da expressão (3.4), tem-se que o limite do bem-estar para $x \rightarrow \infty$ é igual a $1/c$, um valor finito, diferentemente do que acontece com (3.2). Exemplos numéricos do cálculo das medidas associadas a essas duas funções de bem-estar são apresentados no Apêndice C para os dados da Tabela 1, com c definido para que $w(300)$ seja igual a zero.

Atkinson (1970) observou que a função de bem-estar é a função utilidade, usada em tomadas de decisão em inferência bayesiana. Dessa forma, a expressão (3.6) corresponde à definição de utilidade esperada da renda X , segundo uma distribuição de renda $f(x)$. Em sua formulação, esse autor considerou f contínua e definiu a utilidade esperada por

$$E[w(X)] = \int_0^{x_m} w(x)f(x)dx \quad (3.6)$$

sendo x_m o valor máximo de renda na população. A expressão (3.7) pode ser entendida como a utilidade esperada da renda X para uma distribuição de renda discreta $f(x)$, notação que será mantida a partir daqui.

$$E[w(X)] = \sum_{i=1}^k w(x_i)f(x_i). \quad (3.7)$$

Esse autor faz uma crítica às medidas construídas a partir da expressão (3.1): elas não são invariantes sob transformações lineares de $w(x)$, pois dependem dos valores arbitrários para a constante c . Então, novamente em um paralelo com a inferência bayesiana, ele propõe a medida

$$I = 1 - \frac{x_{EDE}}{\mu} \quad (3.8)$$

sendo x_{EDE} o valor que satisfaz

$$w(x_{EDE}) = \int_0^{\bar{x}_m} w(x)f(x)dx$$

Assim, x_{EDE} (do Inglês *equally distributed equivalent*) é o valor de renda que, se todos na população o recebessem, a utilidade seria equivalente à utilidade esperada da distribuição atual. A medida (3.8) é invariante sob transformações lineares de $w(x)$ e pode assumir valores entre zero e um. A proposta de medida de desigualdade apresentada por Atkinson possui uma interpretação aplicada bem proveitosa. Por exemplo, sob determinada função de bem-estar, quando $I = 0,4$ entende-se que em um cenário onde a renda total da população fosse distribuída igualmente entre os indivíduos, precisaria-se somente de 60% da renda total para que se obtesse o mesmo bem-estar já existente.

3.1.1 Análise de medidas usuais para a desigualdade

A formulação por meio de funções de bem-estar depende não só da escolha da função, mas também da determinação de constantes. Devido a essa dificuldade, encontra-se na literatura outra abordagem: verificar se medidas usualmente utilizadas para medir desigualdade satisfazem as seguintes propriedades:

- i. Princípio da transferência - mantendo-se as suposições (1) a (3) do Dalton, pode-se afirmar que, fazendo-se uma transferência de renda de uma pessoa mais rica da população para uma mais pobre de forma que a situação não se inverta, o valor da medida de desigualdade após a transferência deve ser obrigatoriamente inferior ao seu valor antes da transferência;
- ii. Princípio da adição constante - adições e subtrações de um mesmo valor à renda produzem, respectivamente, redução e aumento na desigualdade;
- iii. Princípio da adição proporcional - adições e subtrações proporcionais à renda produzem, respectivamente, redução e aumento na desigualdade.

Além de Dalton (1920), o princípio da transferência e o princípio da adição constante são aceitos por outros autores como Atkinson (1970) e Cowell (1998), mas esses discordam de que aumentos proporcionais à renda diminuam a desigualdade (propriedade iii). Para esses autores, a simples multiplicação de todas as rendas por uma constante não altera a desigualdade, pois as duas sociedades podem ser vistas como iguais a menos de um fator de escala, como se houvesse apenas uma conversão monetária entre ambas. As medidas apresentadas neste trabalho foram analisadas apenas quanto ao princípio da transferência e quanto à invariância sobre adições proporcionais.

Algumas das estatísticas utilizadas para medir desigualdade, encontradas nos trabalhos de referência que serviram de base para este estudo foram:

Variância

$$V(X) = \int_0^{\bar{x}} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (3.9)$$

Variância logarítmica

$$L(X) = \int_0^{\bar{x}} [\log(x/\mu)]^2 f(x) dx \quad (3.10)$$

Desvio médio relativo

$$D(X) = \int_0^{\bar{x}} |x/\mu - 1| f(x) dx \quad (3.11)$$

Índice L de Theil

$$T(X) = \int_0^{\bar{x}} \frac{x}{\mu} \log\left(\frac{x}{\mu}\right) f(x) dx \quad (3.12)$$

Índice de Gini

$$G(X) = \frac{1}{2\mu} \int_0^{\bar{x}} [xF(x) - \mu\Phi(x)] f(x) dx \quad (3.13)$$

sendo

$$\Phi(x) = \int_0^{\bar{x}} F(x) dx$$

Coefficiente de Bowley

$$B(X) = (Q_3 - Q_1)/(Q_3 + Q_1) \quad (3.14)$$

Coefficiente de variação

$$CV(X) = \sqrt{V(X)}/\mu \quad (3.15)$$

Razão de renda

$$R_{\alpha,\beta} = \frac{\text{Renda média dos } \alpha\% \text{ mais ricos}}{\text{Renda média dos } \beta\% \text{ mais pobres}} \quad (3.16)$$

3.1.2 Sensibilidade à transferência de renda e invariância sob adições proporcionais

Das medidas acima, tem-se que o desvio médio relativo só apresenta redução se a transferência de renda for de um indivíduo com renda acima da média para outro com renda abaixo da média, assim como a razão de renda só reduz se a transferência ocorrer de um indivíduo com renda acima do percentil α para outro com renda abaixo do percentil β ; o coeficiente de Bowley só se altera se a transferência afetar os quartis 1 ou 3 Schutz (1951 apud ATKINSON, 1970) afirma que várias curvas de Lorenz diferentes podem produzir o mesmo valor para o índice de Gini, o que significa que esse índice também não tem a sensibilidade desejada sob transferências de renda. As demais medidas são sensíveis a transferências de renda; seus valores sofrem redução sob qualquer transferência de um indivíduo com maior renda para outro com renda inferior.

O coeficiente de Bowley e a razão de renda são razões baseadas em percentis e não

sofrem alteração sob adições proporcionais. As demais medidas são relativas à média e, por isso, não se alteram sob adições proporcionais.

3.1.3 Análise das funções de bem-estar associadas a algumas medidas de desigualdade

As funções de bem-estar associadas às medidas (3.9) a (3.12) são, respectivamente, $(x-\mu)^2$, $[\log(x/\mu)]^2$, $(x/\mu)\log(x/\mu)$ e $|x/\mu-1|$, e estão mostradas na Figura 6. Observa-se que as funções de bem-estar associadas à variância, ao desvio médio relativo e à variância logarítmica (3.9 a 3.11) são crescentes apenas para $x > \mu$. A função de bem-estar associada ao índice L de Theil (3.12) é crescente apenas quando $x > \mu/e$. Além disso, dentre essas medidas, apenas a função de bem-estar da variância logarítmica tem um intervalo em que é côncava: quando $x > e\mu$. Logo, as medidas resultantes são inadequadas como medidas de desigualdade.

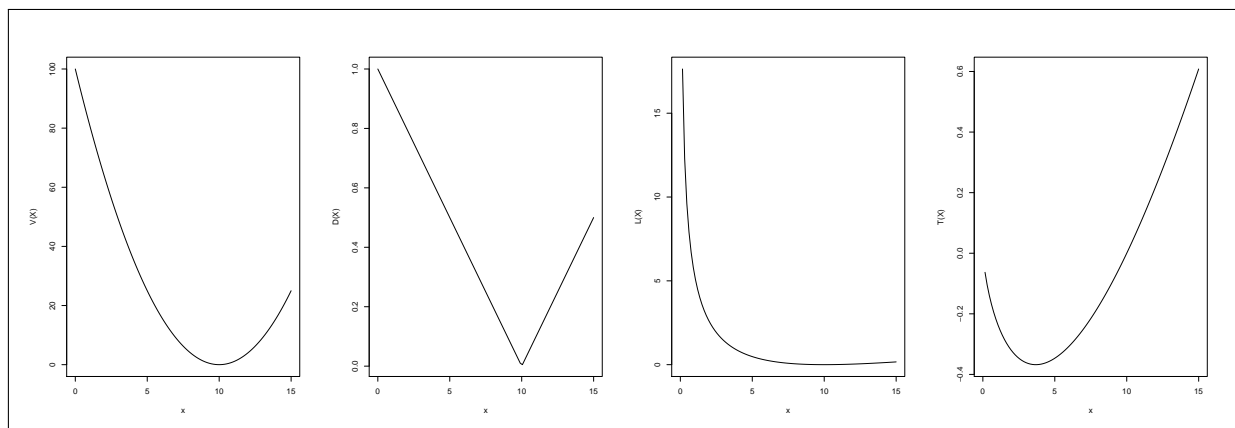


Figura 6: Funções de bem-estar associadas às medidas (3.9) a (3.12), para $\mu = 10$, por coluna.

Os valores de renda na Figura 6 não foram centrados na média porque, em geral, as distribuições de renda são assimétricas à direita, com maior densidade em valores abaixo da média. Não foi possível identificar as funções de bem-estar associadas às medidas (3.13) a (3.16).

3.1.4 Funções de bem-estar para as quais a medida I é invariante sob adições proporcionais

A medida I , dada em (3.8) é invariante sob transformações lineares de uma dada função de bem-estar $w(x)$. Além disso, Atkinson (1970) identificou funções $w(x)$ tais que

a medida (3.8) é invariante a adições proporcionais de renda. Elas devem ter a forma:

$$w(x) = \begin{cases} A + B \frac{x^{1-\epsilon}}{1-\epsilon}; & \epsilon \neq 1 \\ \log_{\epsilon}(x); & \epsilon = 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

que é côncava se $\epsilon \geq 0$ Atkinson (1970 apud PRATT,). Essas medidas estão sujeitas às mesmas críticas quanto à necessidade de escolha de valores para as constantes ϵ , A e B . A função de bem-estar (3.2) proposta por Dalton (1920) é um caso particular de (3.17) para $\epsilon = 1$, se $c = 0$, enquanto (3.4) corresponde a fazer $\epsilon = 2$, $A = 1/c$ e $B = 1$ (Figura 5).

3.2 Resultados da aplicação

Nesta seção estão expostos os resultados relativos aos 5.564 municípios analisados pelo Censo 2010 e os modelos de regressão linear simples utilizados. Para as análises aqui mostradas, todos os municípios foram considerados e escolheu-se essa granularidade, em vez dos estados, para que cada um tivesse sua realidade exposta já que o agrupamento por estado poderia mascarar problemas em municípios específicos, pois a distribuição de renda não é proporcionalmente igualitária para cada um de acordo com seus tamanhos territoriais e populacionais.

3.2.1 Análise Descritiva

A fim de obter uma compreensão inicial sobre o comportamento dos dados, realizou-se uma análise descritiva com a Figura 7, a qual mostra a relação entre a esperança de vida ao nascer e a renda *per capita*. Vê-se que, em municípios mais pobres, a expectativa de vida aumenta consideravelmente com pequenos acréscimos de renda; porém a partir de um determinado patamar de renda, o qual parece aproximar-se de R\$750,00, a taxa de aumento é reduzida drasticamente. Nos escassos municípios mais ricos, localizados na extrema direita da figura, a esperança de vida parece apresentar fraca ou nenhuma relação com a renda *per capita*. Essa ocorrência indica que, para municípios ricos, o aumento da renda *per capita* não representa a adição de anos em sua expectativa de vida ao nascer, o que pode estar associado às limitações do corpo e da ciência.

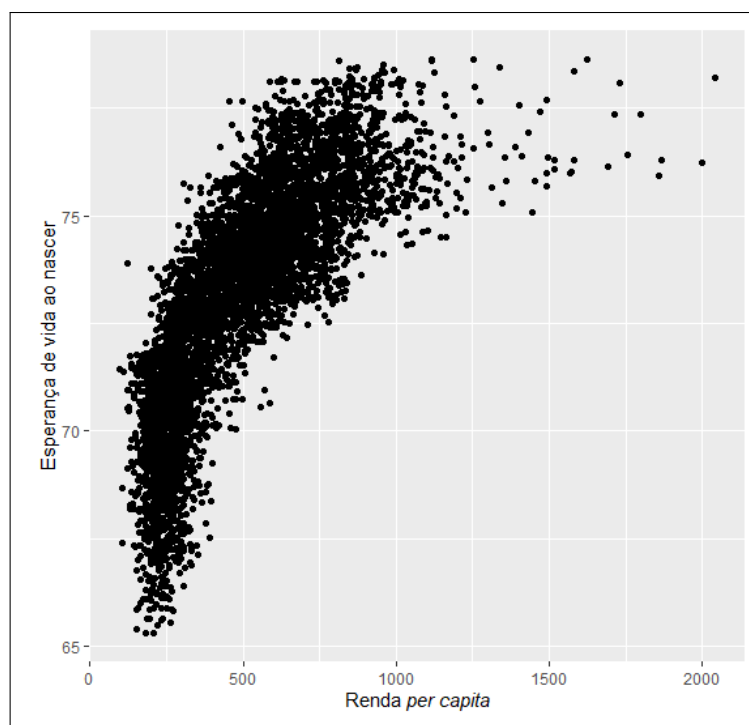


Figura 7: Gráfico de dispersão das variáveis renda *per capita* e esperança de vida ao nascer.

A Figura 8 expõe a tendência de estabilidade das variáveis porcentagem da população que vive em domicílios com banheiro e água encanada e a taxa de mortalidade infantil em relação à renda *per capita* nos municípios mais ricos. A recorrência desse padrão mostra-se condizente com o estudo apresentado por Wilkson e Pickett (2015) e suscita a ideia de que acréscimos na renda, a partir de determinado patamar econômico, não representam aumento no bem-estar dos indivíduos. Esse entendimento provoca a reflexão sobre o que poderia gerar esse aumento e a hipótese levantada é a da redução da desigualdade social.

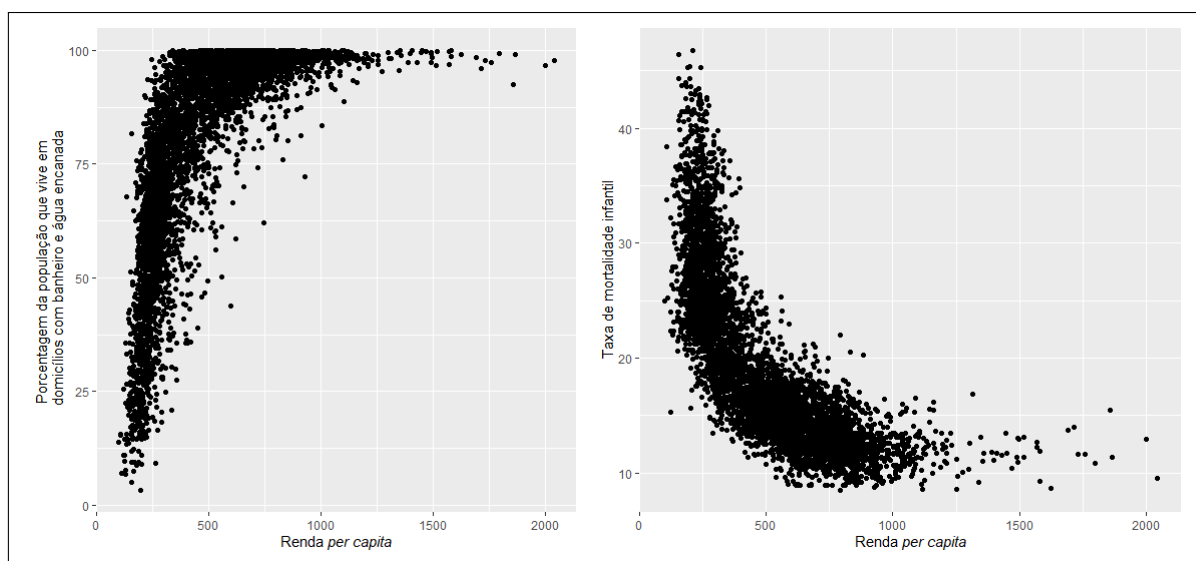


Figura 8: Gráficos de dispersão da variável explicativa renda *per capita* e variáveis resposta "porcentagem da população que vive em domicílios com banheiro e água encanada" e "taxa de mortalidade infantil", respectivamente.

Com o interesse de adquirir uma visão particular sobre as características dos municípios, a Tabela 3 apresenta, de maneira crescente a partir da renda *per capita*, os resultados das variáveis explicativas para os dez municípios mais pobres e mais ricos. Dentre os municípios mais pobres, 70% são do estado do Maranhão e o restante se distribui entre Roraima e Amapá; os mais ricos estão associados a seis estados distintos e o Distrito Federal. O município mais rico dentre todos, São Caetano do Sul/SP, possui renda *per capita* aproximadamente 21 vezes maior do que o município mais pobre, Marajá do Sena/MA.

Ainda sob a análise das variáveis explicativas, a Tabela 4 explicita que 75% dos municípios possuem renda *per capita* inferior a R\$650,63 e que a razão de renda máxima entre os 20% mais ricos e 20% mais pobres foi de 27.282,67. Observou-se que esse valor estava associado ao município de Iracema, no Estado da Roraima e, por ser um *outlier* em relação ao restante dos dados, sua veracidade foi questionada. Assim, esse município foi excluído de análises descritivas que serão apresentadas ainda nesta seção.

Tabela 3: Variáveis explicativas associadas aos dez municípios mais pobres e ricos

	Município	UF	Renda per capita	Índice de Theil-L	Índice de Gini	Razão de Renda
1	Marajá do Sena	MA	96,25	0,59	0,62	97,24
2	Fernando Falcão	MA	106,99	0,54	0,55	25,61
3	Belágua	MA	107,14	0,65	0,63	65,34
4	Cachoeira Grande	MA	110,65	0,52	0,57	35,93
5	Amajari	RR	121,32	0,65	0,75	NA
6	Santo Antônio do Içá	AM	122,21	0,70	0,67	843,45
7	Uiramutã	RR	123,16	1,06	0,78	NA
8	Serrano do Maranhão	MA	123,44	0,55	0,59	56,45
9	Humberto de Campos	MA	125,91	0,64	0,64	114,06
10	Jenipapo dos Vieiras	MA	127,24	0,64	0,67	NA
11	Balneário Camboriú	SC	1.625,59	0,47	0,52	13,27
12	Santos	SP	1.693,65	0,56	0,55	18,07
13	Brasília	DF	1.715,11	0,76	0,63	30,18
14	Nova Lima	MG	1.731,84	0,88	0,68	29,74
15	Porto Alegre	RS	1.758,27	0,69	0,60	25,55
16	Florianópolis	SC	1.798,12	0,53	0,54	17,19
17	Santana de Parnaíba	SP	1.858,69	0,89	0,67	35,87
18	Vitória	ES	1.866,58	0,69	0,60	26,52
19	Niterói	RJ	2.000,29	0,67	0,59	26,13
20	São Caetano do Sul	SP	2.043,74	0,52	0,54	15,86

Tabela 4: Medidas de tendência central e de posição de cada variável explicativa

Variável Resposta	Mínimo	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
Renda <i>per capita</i>	96,25	281,13	467,74	493,65	650,63	2.043,74
Razão de renda	4,12	10,45	14,61	24,87	22,77	27.282,67
Índice de Theil-L	0,14	0,36	0,44	0,456	0,533	1,36
Índice de Gini	0,28	0,45	0,49	0,490	0,540	0,80

Observando as distinções entre ricos e pobres, pela Tabela 5 é possível perceber que variáveis negativas como a mortalidade infantil e a porcentagem de adolescentes que tinham filhos tendem a ser maiores nos municípios mais pobres. Por outro lado, variáveis

como a porcentagem de pessoas que vivem em domicílios com energia elétrica e os anos de estudo são maiores nos municípios mais ricos.

Tabela 5: Variáveis respostas associadas aos dez municípios mais pobres e ricos

Municípios	UF	Taxa de Mortalidade infantil	Porcentagem de adolescentes que tinham filhos	Porcentagem de pessoas em domicílios com energia elétrica	Anos de estudo
1 Marajá do Sena	MA	25,00	6,70	57,49	6,62
2 Fernando Falcão	MA	33,80	5,79	88,36	5,75
3 Belágua	MA	38,40	3,26	90,57	8,06
4 Cachoeira Grande	MA	25,20	6,80	82,52	8,74
5 Amajari	RR	15,30	12,46	48,19	4,72
6 Santo Antônio do Içá	AM	24,00	7,62	89,18	6,49
7 Uiramutã	RR	22,40	4,63	27,41	4,73
8 Serrano do Maranhão	MA	32,20	7,63	86,66	8,89
9 Humberto de Campos	MA	27,60	5,85	93,25	9,46
10 Jenipapo dos Vieiras	MA	26,40	6,64	94,24	6,75
11 Balneário Camboriú	SC	8,70	1,03	100,00	10,47
12 Santos	SP	13,70	1,99	99,94	10,84
13 Brasília	DF	14,01	2,05	99,91	9,87
14 Nova Lima	MG	11,67	0,88	99,70	9,77
15 Porto Alegre	RS	11,60	2,29	99,91	9,76
16 Florianópolis	SC	10,81	2,02	99,96	10,79
17 Santana de Parnaíba	SP	15,49	2,17	99,88	10,01
18 Vitória	ES	11,37	2,03	99,98	10,04
19 Niterói	RJ	12,91	1,91	99,98	9,68
20 São Caetano do Sul	SP	9,50	0,72	100,00	11,04

Com o objetivo de medir a desigualdade de renda dos indivíduos de cada município, utilizou-se a razão dos quintos. Para que, mediante a discrepância dos valores encontrados, a visualização dos dados não fosse prejudicada, fez-se a ordenação crescente dos municípios a partir de sua razão de renda. A Figura 9 apresenta, respectivamente, os municípios mais iguais e mais desiguais após a exclusão dos municípios que não tinham valor atribuído para essa variável e do município de Iracema por seu valor extremo.

Considerou-se válida a disposição de dois gráficos não para que fossem comparados diretamente, pois estão em escalas de medidas distintas, mas para que fosse observado que dentre os municípios mais ricos a distribuição de renda dos 20% mais ricos em relação aos 20% mais pobres não tem muita variação, porém dentre os municípios mais pobres, a disparidade é grande.

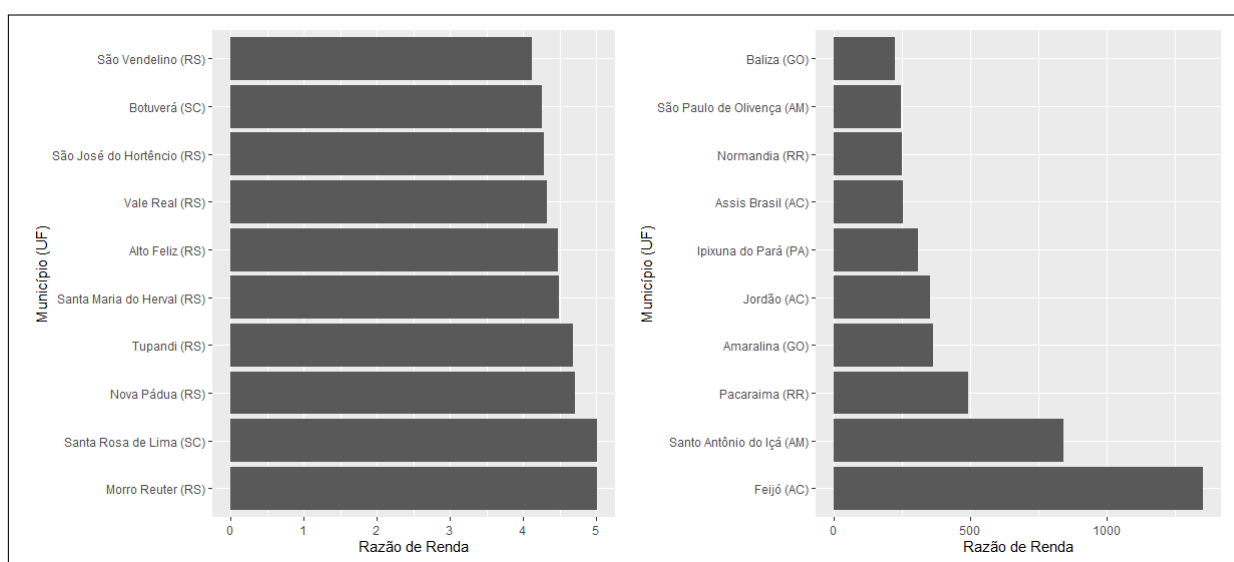


Figura 9: Razão dos quintos dos dez municípios mais iguais e desiguais, respectivamente.

Conforme apresentado em Wilkson e Pickett (2015), como a desigualdade de renda possui consequências que variam com o contexto, torna-se importante a aplicação de algum método que separe os ricos dos pobres para que haja uma padronização na análise a ser efetuada. Neste trabalho foram desenvolvidas duas funções que objetivaram a definição dos municípios mais ricos considerando o ponto a partir do qual havia independência de uma considerável parcela das variáveis respostas em relação a renda *per capita*. Para tal, usou-se regressões lineares entre cada variável resposta e a renda *per capita* e também, os resultados apresentados na análise descritiva. As especificações dessas funções encontram-se no Apêndice E. Sob essas considerações, a partir deste ponto, considerou-se somente os 100 municípios mais ricos dos dados.

A fim de uma compreensão mais profunda sobre a disposição dos dados após a seleção dos municípios, a Figura 10 explicita que parece haver uma dependência entre o índice de Gini e a porcentagem de extremamente pobres, porcentagem de adolescentes que tinham filhos e anos de estudos, pois a distribuição apresenta uma centralização. Avaliando cada gráfico da Figura 11 individualmente vê-se uma correlação leve entre a razão de renda e as variáveis porcentagem da população que vive em domicílios com banheiro e água

encanada, taxa de envelhecimento e taxa de mortalidade materna. E, analisando-se os gráficos dispostos na Figura 12 isoladamente percebe-se que esses não parecem possuir associação com o índice de Theil-L. Outras relações entre variáveis explicativas e medidas de desigualdade podem ser consultadas no Apêndice F.

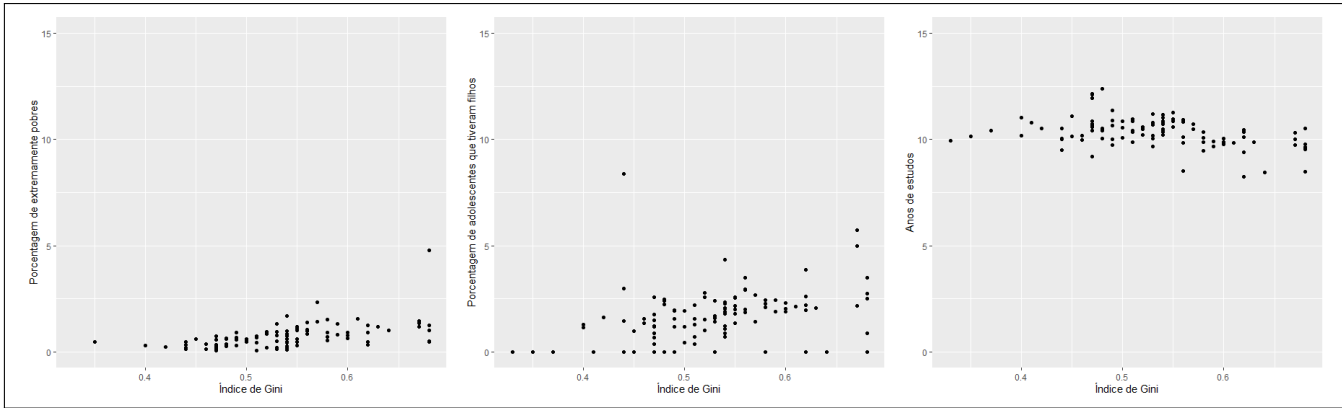


Figura 10: Gráficos de dispersão do índice de Gini e as variáveis porcentagem da população que vive em domicílios com banheiro e água encanada, taxa de envelhecimento e taxa de mortalidade materna, para os 100 municípios mais ricos.

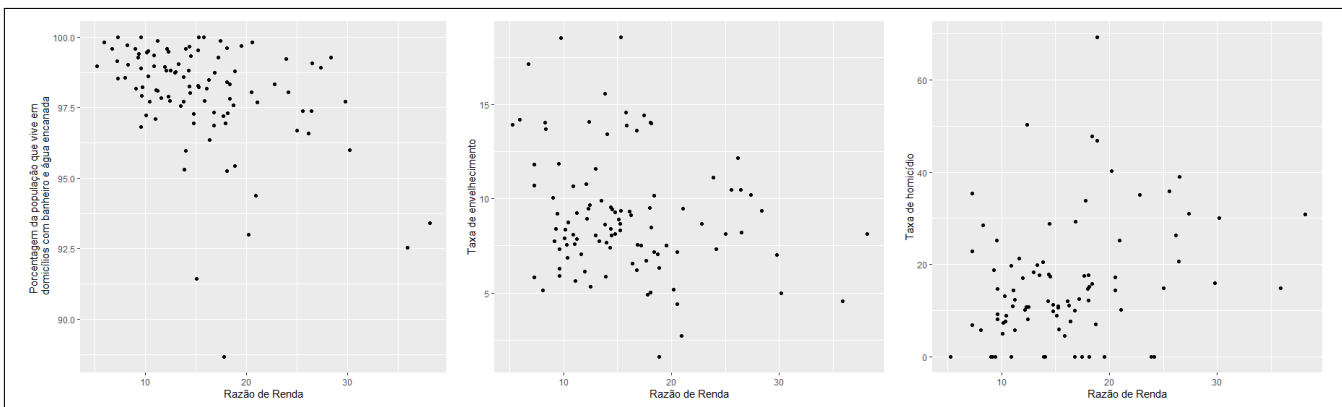


Figura 11: Gráficos de dispersão da razão de renda com as variáveis porcentagem de extremamente pobres, porcentagem de adolescentes com filhos e anos de estudos, para os 100 municípios mais ricos.

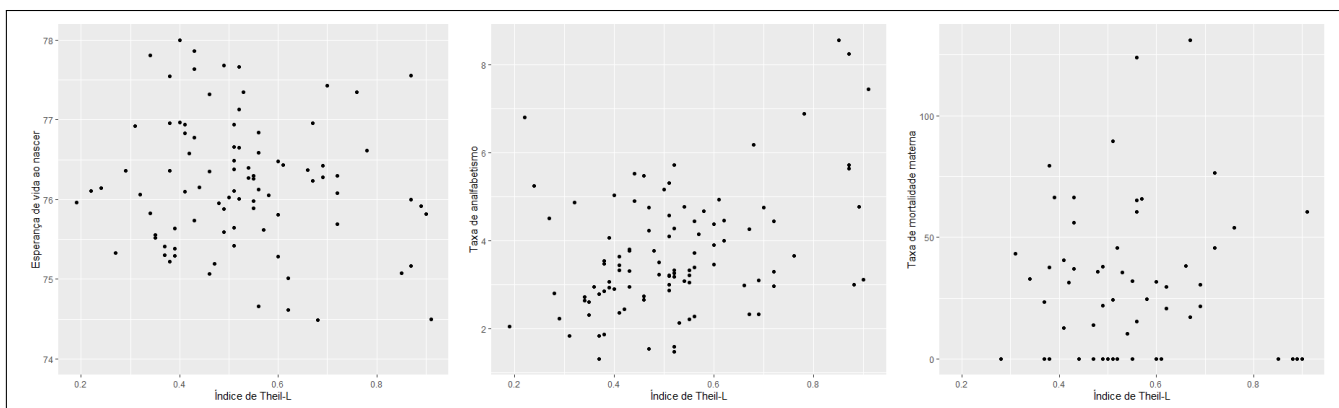


Figura 12: Gráficos de dispersão do índice de Theil-L com as variáveis esperança de vida, taxa de analfabetismo e taxa de mortalidade materna, para os 100 municípios mais ricos.

3.2.2 Modelos de regressão

A fim de corroborar que a quantidade de municípios selecionada era adequada, foram ajustados modelos de regressão linear simples de cada variável resposta com a renda *per capita* e com as medidas de desigualdade.

A Tabela 6 expõe os resultados da primeira análise. Vê-se que, para os 100 municípios mais ricos selecionados, o *p-valor* é consideravelmente maior do que o nível de significância estabelecido para todas as variáveis em relação a renda *per capita*, com exceção da porcentagem de pessoas em domicílios com energia elétrica e da taxa de analfabetismo.

Nesse casos, como o *p-valor* encontrado está na região crítica, assume-se que o coeficiente angular foi nulo, não existe relação linear significativa entre essas variáveis respostas e a renda *per capita*. Esse resultado está em acordo com as Figuras 7 e 8, nas quais, a partir de determinado patamar econômico, o aumento da renda *per capita* não representa ganhos em bem-estar através de variáveis como a esperança de vida ao nascer, a taxa de mortalidade materna e a porcentagem de adolescentes que tinham filhos.

Tabela 6: Resultados de cada modelo de regressão linear entre as variáveis respostas e a renda *per capita*

	Variável Resposta	$\hat{\beta}_1$	$\sigma(\hat{\beta}_1)$	t	P-valor
1	Esperança de vida ao nascer	8e-04	4e-04	1,9210	0,0570
2	Taxa de mortalidade infantil	-0,0002	0,0010	-0,2640	0,7940
3	Taxa de mortalidade materna	0,0115	0,0150	0,7770	0,4400
4	Anos de Estudos	-8e-05	3e-04	-0,2910	0,7720
5	Porcentagem de pessoas em domicílios com energia elétrica	1e-04	7e-05	1,7530	0,0820
6	Porcentagem de adolescentes que tinham filhos	0,0010	0,0050	0,5920	0,5550
7	Porcentagem de extremamente pobres	-0,0003	0,0002	-1,1160	0,2670
8	Taxa de Analfabetismo	-0,0017	0,0006	-2,8970	0,0050
9	Taxa de envelhecimento	0,0014	0,0014	1,0310	0,3050
10	Porcentagem de mães chefes de família, sem fundamental completo e com pelo menos um filho menor de 15 anos de idade	-0,0029	0,0019	-1,4780	0,1430
11	Porcentagem da população que vive em domicílios com banheiro e água encanada	0,00009	0,0008	0,1170	0,9070
12	Taxa de mortalidade por homicídios	0,0061	0,0059	1,0270	0,3070

Sob essa perspectiva, as Tabelas 7 e 8 e 9 apresentam, respectivamente, os resultados das regressões entre cada variável resposta com o índice de Theil-L, índice de Gini e Razão de Renda. Elas possibilitam a interpretação das relações para que avalie-se os efeitos. As variáveis taxa de mortalidade infantil, porcentagem de adolescentes que tinham filhos e taxa de mortalidade por homicídios tinham associações positivas com as três medidas de desigualdade utilizadas. Tem-se, por exemplo, o acréscimo de 37,192 óbitos por homicídios por 100 mil habitantes a cada acréscimo de uma unidade da razão de renda. E, também, o acréscimo de 7,066 na porcentagem de mães chefes de família, sem fundamental completo e com pelo menos um filho menor do que 15 anos de idade a cada aumento de uma unidade da mesma medida.

Tabela 7: Resultados de cada modelo de regressão linear entre as variáveis respostas e o índice de Theil-L

	Variável Resposta	$\hat{\beta}_1$	$\sigma(\hat{\beta}_1)$	t	P-valor
1	Esperança de vida ao nascer	-1,0238	0,6335	-1,6161	0,1090
2	Taxa de mortalidade infantil	3,4483	1,0100	3,4140	0,0009
3	Taxa de mortalidade materna	5,9588	27,1640	0,2190	0,8271
4	Anos de Estudos	-1,7202	0,4023	-4,2760	0,00004
5	Porcentagem de pessoas em domicílios com energia elétrica	-0,1768	0,1030	-1,7150	0,0896
6	Porcentagem de adolescentes que tinham filhos	2,5173	0,7724	3,2590	0,00154
7	Porcentagem de extremamente pobres	2,1254	0,3595	5,9130	6e-08
8	Taxa de Analfabetismo	3,5271	0,8029	4,3930	0,00002
9	Taxa de envelhecimento	-4,3050	1,9620	-2,1940	0,0306
10	Porcentagem de mães chefes de família, sem fundamental completo e com pelo menos um filho menor de 15 anos de idade	7,0660	2,7980	2,5250	0,01320
11	Porcentagem da população que vive em domicílios com banheiro e água encanada	-3,4970	1,1300	-3,0950	0,0026
12	Taxa de mortalidade por homicídios	15,8300	8,7930	1,8000	0,0753

Tabela 8: Resultados de cada modelo de regressão linear entre as variáveis respostas e o índice de Gini

	Variável Resposta	$\hat{\beta}_1$	$\sigma(\hat{\beta}_1)$	t	P-valor
1	Esperança de vida ao nascer	-2,0680	1,3676	-1,5120	0,1340
2	Taxa de mortalidade infantil	7,3650	2,1790	3,3800	0,00104
3	Taxa de mortalidade materna	13,710	63,130	0,2170	0,8290
4	Anos de Estudos	-3,3855	0,8803	-3,8460	0,0002
5	Porcentagem de pessoas em domicílios com energia elétrica	-0,3895	0,2219	-1,7550	0,0824
6	Porcentagem de adolescentes que tinham filhos	5,6064	1,6585	3,3800	0,00104
7	Porcentagem de extremamente pobres	4,5281	0,8185	5,5320	3,28e-07
8	Taxa de Analfabetismo	6,9588	1,7576	3,9590	0,0001
9	Taxa de envelhecimento	-10,6310	4,1950	-2,534	0,0129
10	Porcentagem de mães chefes de família, sem fundamental completo e com pelo menos um filho menor de 15 anos de idade	16,4160	6,0810	2,700	0,0082
11	Porcentagem da população que vive em domicílios com banheiro e água encanada	-7,8100	2,4260	-3,2190	0,0018
12	Taxa de mortalidade por homicídios	37,1920	19,355	1,922	0,0579

Tabela 9: Resultados de cada modelo de regressão linear entre as variáveis respostas e a Razão de Renda

	Variável Resposta	$\hat{\beta}_1$	$\sigma(\hat{\beta}_1)$	t	P-valor
1	Esperança de vida ao nascer	-0,0263	0,0160	-1,6420	0,1040
2	Taxa de mortalidade infantil	0,0991	0,0251	3,9460	0,0002
3	Taxa de mortalidade materna	0,6576	0,6042	1,0880	0,2810
4	Anos de Estudos	-0,0397	0,0103	-3,8350	0,0002
5	Porcentagem de pessoas em domicílios com energia elétrica	-0,0033	0,0026	-1,2910	0,2000
6	Porcentagem de adolescentes que tinham filhos	0,0550	0,0198	2,7760	0,0066
7	Porcentagem de extremamente pobres	0,0599	0,0083	7,1860	2e-10
8	Taxa de Analfabetismo	0,0681	0,02110	3,2220	0,0017
9	Taxa de envelhecimento	-0,1142	0,0495	-2,3060	0,0232
10	Porcentagem de mães chefes de família, sem fundamental completo e com pelo menos um filho menor de 15 anos de idade	0,1909	0,0700	2,7270	0,0076
11	Porcentagem da população que vive em domicílios com banheiro e água encanada	-0,1199	0,0274	-4,3730	3e-05
12	Taxa de mortalidade por homicídios	0,6167	0,2129	2,8960	0,0048

A Tabela 10 apresenta o *p-valor* dos testes de verificação da nulidade do coeficiente angular entre cada variável resposta e as medidas de desigualdade. Algumas variáveis somente apresentaram evidências de relação linear com algumas das medidas de desigualdade como, por exemplo, a porcentagem de pessoas em domicílios com energia elétrica que somente relacionou-se com os índices de Theil-L e de Gini.

Tabela 10: P-valor do teste de nulidade do coeficiente angular no modelo de regressão linear entre cada variável resposta e cada índice de desigualdade

Variável Resposta	Índice de Theil-L	Índice de Gini	Razão de renda
Esperança de vida ao nascer	0,109	0,134	0,104
Taxa de mortalidade infantil	0,00093	0,00104	0,0002
Taxa de mortalidade materna	0,8271	0,829	0,281
Anos de Estudos	0,00004	0,0002	0,0002
Porcentagem de pessoas em domicílios com energia elétrica	0,0896	0,0824	0,2
Porcentagem de adolescentes que tinham filhos	0,00154	0,00104	0,0066
Porcentagem de extremamente pobres	0 ⁺	0 ⁺	0 ⁺
Taxa de analfabetismo	0,00002	0,0001	0,0017
Taxa de envelhecimento	0,0306	0,0129	0,0232
Porcentagem de mães chefes de família, sem fundamental completo e com pelo menos um filho menor de 15 anos de idade	0,0132	0,0082	0,0076
Porcentagem da população que vive em domicílios com banheiro e água encanada	0,0026	0,0018	0 ⁺
Taxa de mortalidade por homicídios	0,0753	0,0579	0,0048

Torna-se importante ressaltar que a seleção da análise de determinadas variáveis respostas para certos grupos de municípios, por exemplo, a partir de uma subdivisão por estados geraria associações distintas que, possivelmente, seriam mais fortes do que as aqui encontradas. Apesar disso, preferiu-se uniformizar todas as análises realizadas sobre os municípios.

Avaliando-se os ajustes, percebeu-se que embora algumas relações entre variáveis fossem significativas, o R^2 ajustado não era tão grande, significando que as medidas de desigualdade não explicam as variáveis isoladamente. Por exemplo, quanto à porcentagem de extremamente pobres, percebeu-se que 37,25% de sua variabilidade era explicada pela Razão de Renda. Para tal relação tem-se a reta ajustada: $\hat{Y} = -0,2327 + 0,06X$. Esses resultados sugeriram a existência de pelo menos uma variável não controlada que possi-

velmente diferenciaria os municípios de forma a melhorar a porcentagem de explicação das variáveis. Por exemplo, a procedência do patrimônio do município o qual pode ser majoritariamente proveniente da agricultura, indústria, dentre outros.

Fez-se também os gráficos de resíduos estudentizados das variáveis taxa de mortalidade infantil e porcentagem de adolescentes que tinham filhos para as medidas de desigualdade os quais são apresentados, respectivamente, nas Figuras 13 e 14. Pela Figura 13 vê-se que de maneira geral, todos os pontos variam aleatoriamente em torno de zero, porém há resíduos no extremo do eixo Y que desviam desse padrão, ou seja, parecem não ter variabilidade constante. Um comportamento semelhante é encontrado na Figura 14, porém novamente parece não haver quebra da suposição de homogeneidade da variância.

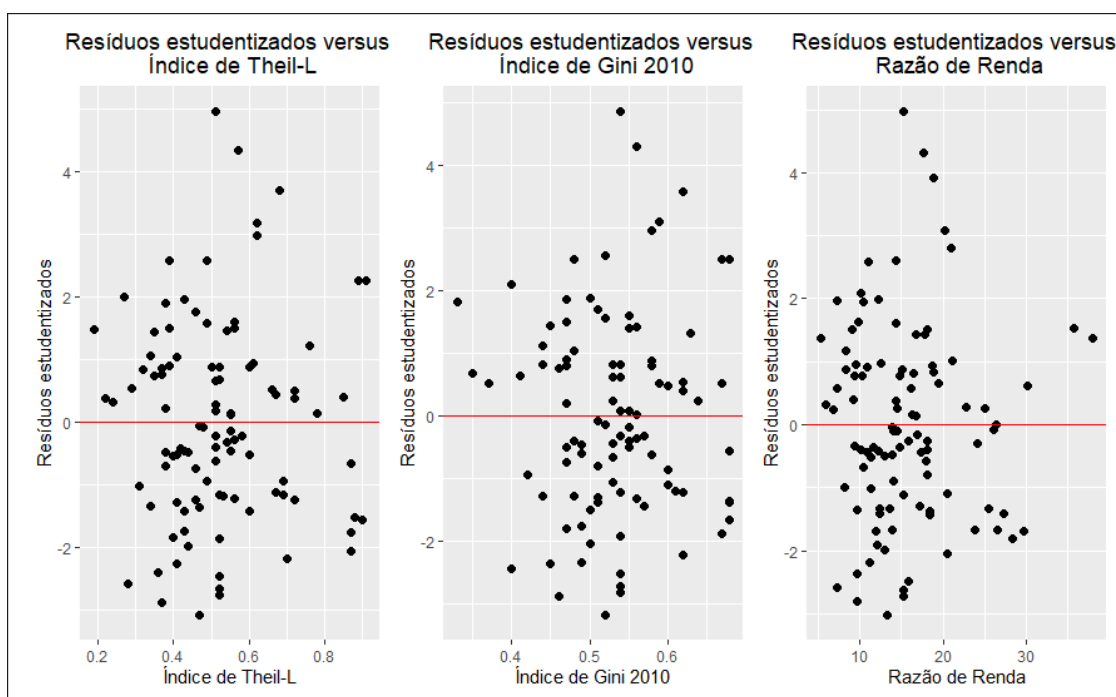


Figura 13: Resíduos estudentizados taxa de mortalidade infantil versus medidas de desigualdade

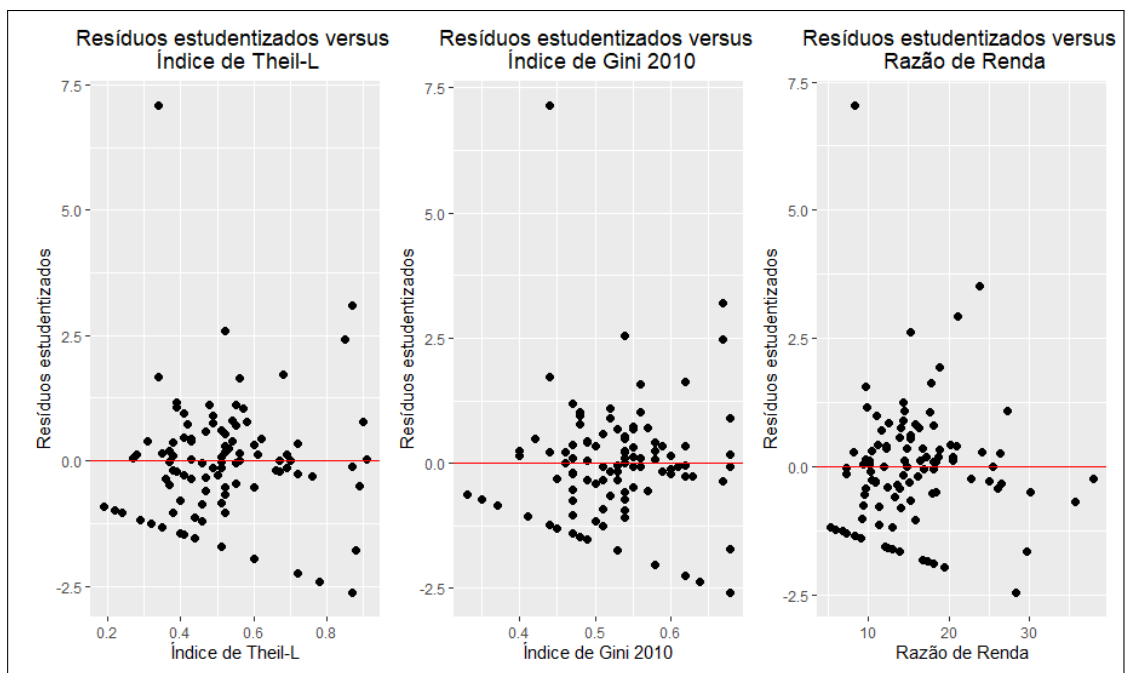


Figura 14: Resíduos estudentizados porcentagem de adolescentes que tiveram filhos versus medidas de desigualdade

4 Conclusões

Conforme apresentado neste trabalho, entende-se que a riqueza medida pela renda *per capita* é um fator importante para que os municípios ultrapassem um bem-estar mínimo e desenvolvam-se em indicadores como a esperança de vida, a taxa de analfabetismo, dentre outros. Porém, seu excesso não representa ganhos no bem-estar. As análises sobre os municípios ricos selecionados pela metodologia aplicada mostraram-se condizentes com os resultados expostos em Wilkson e Pickett (2015) o qual propôs que a partir de determinado patamar de renda, o crescimento do bem-estar seria justificado pela redução da desigualdade.

Corroborando os resultados apresentados em Biggs et al. (2010), viu-se que a variabilidade das variáveis respostas não era explicada em maioria pela renda e que a desigualdade tinha uma considerável influência sobre elas. Essa averiguação já apresentada em Wilkson e Pickett (2015) exprime um grande potencial de argumentação para a alocação de recursos estatais e privados a fim do alcance da redução da desigualdade. Empiricamente, vê-se a violação do direito ao bem-estar e infra-estrutura de qualidade dos municípios mais pobres e assim, não é realista esperar que o Estado seja justo e fraterno sem ganhos para as camadas mais ricas.

Ressalta-se que indicadores de segurança pública poderão ser utilizados em estudos futuros para que se justifique o ganho em bem-estar para toda a sociedade por meio da redução da desigualdade. Por exemplo, com o uso de indicadores como a taxa de roubo de carros e taxa de mão de obra especializada para mercados específicos. Quanto à decisão sobre qual medida de desigualdade utilizar, expôs-se que é necessário cautela para que realmente apresente-se resultados representativos sobre a realidade dos municípios.

Referências

ATKINSON, A. B. On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory*, v. 2, n. 3, p. 244–263, 1970.

ATLAS. Atlas brasil - consulta. *Atlas Brasil*, 2021. Disponível em: <http://www.atlasbrasil.org.br/consulta/planilha>. Acesso em: 15 ago. 2021.

BARRETO, F. et al. Entendendo o índice de Gini. *Instituto de Pesquisa e Estratégia Econômica do Ceará - IPECE*, Ceará, 2020. Disponível em: https://www.ipece.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/45/2015/02/Entendendo_Indice_GINI.pdf. Acesso em: 27 ago. 2021.

BIGGS, B. et al. Is wealthier always healthier? the impact of national income level, inequality, and poverty on public health in latin america. *Social Science Medicine*, jul. 2010. Disponível em: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/20471147/>. Acesso em: 28 ago. 2021.

BRASIL. Artigo 5º, de 5 de outubro de 1988. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, Brasília, DF, 1988. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm.

BRASÍLIA, D. Desperdício-custo para todos-alimentos apodrecem enquanto milhões de pessoas passam fome. *Ipea desafios do desenvolvimento*, out. 2009. Disponível em: https://www.ipea.gov.br/desafios/index.php?option=com_content&id=1256. Acesso em: 30 jul. 2021.

CAPITAL, C. Ibge: Concentração de renda e desigualdade diminuíram com o auxílio emergencial. *Economia - Carta Capital*, Carta Capital, nov. 2021. Disponível em: <https://www.cartacapital.com.br/economia/ibge-concentracao-de-renda-e-desigualdade-diminuiram-com-o-auxilio-emergencial/>. Acesso em: 28 jan. 2022.

CASTRO, J. de. *Geografia da Fome*. 10. ed. [S.l.]: Antares, 1984.

COWELL, F. Measurement of inequality. 1998.

DALTON, H. The measurement of the inequality of incomes. *The Economic Journal*, Oxford University Press, Oxford, n. 119, sep. 1920. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2223525>. Acesso em: 25 ago. 2021.

FARIAS, C. *Revista de Geografia Programa de Pós-Graduação em Geografia da UFPE*, Recife, mar. 2010. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/revistageografia/article/view/228820>. Acesso em: 21 ago. 2021.

- GUERRA, S. C.; RIOS-NETO, E. L. G. Ibge sai em defesa do orçamento do censo 2021. *IBGE sai em defesa do orçamento do Censo 2021*, set. 2021. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/30350-ibge-sai-em-defesa-do-orcamento-do-censo-2021>. Acesso em: 25 ago. 2021.
- HARVEY, D. 1. ed. São Paulo: Boitempo Editorial, 2015.
- HOFFMANN, R.; BOTASSIO, D. C.; JESUS, J. G. de. *Distribuição de renda: Medidas de desigualdade, pobreza, concentração, segregação e polarização*. 2. ed. [S.l.]: Editora da Universidade de São Paulo, 2012.
- IBIRAPITANGA, I. et al. Insegurança alimentar e covid-19 no brasil. *Plateforme de connaissances sur l'agriculture familiale*, Rede Brasileira de Pesquisa em Soberania e Segurança Alimentar (Rede PENSSAN), mar. 2021. Disponível em: <https://www.fao.org/family-farming/detail/fr/c/1392789/>. Acesso em: 26 jan. 2022.
- JOVENS, I. E. Uso de internet, televisão e celular no brasil. *IBGE Educa Jovens*, 2021. Disponível em: <https://educa.ibge.gov.br/jovens/materias-especiais/20787-uso-de-internet-televisao-e-celular-no-brasil.html>. Acesso em: 20 ago. 2021.
- KUTNER, M. et al. *Applied Linear Statistical Models*. 5. ed. [S.l.]: Mc Graw-Hill Irwin, 2005.
- MARX, K. *O Capital. Critica da Economia Política*. [S.l.: s.n.], 1867.
- MEDEIROS, M. *Medidas de Desigualdade e Pobreza*. 1. ed. [S.l.]: Editora da Universidade de Brasília, 2012.
- PEN, J. Income distribution: facts,theories,policies. 1971. Disponível em: <https://academic.oup.com/ej/article-abstract/82/325/242/5233060?redirectedFrom=PDF>. Acesso em: 10 mai. 2021.
- PRATT, J. W. Risk aversion in the small and in the large. *The Econometric Society, Econometrica*, n. 1/2, jan. Disponível em: https://moodle.umontpellier.fr/pluginfile.php/885705/mod_resource/content/1/Pratt%20-%201964%20-%20Econometrica.pdf. Acesso em: 10 jan. 2022.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2014. Disponível em: <http://www.R-project.org/>.
- ROSS, S. M. *A First Course in Probability*. 8. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2010.
- SANTOS, M. *Por uma outra globalização: do pensamento único à consciência universal*. [S.l.: s.n.], 2003.
- SCHUTZ, R. R. On the measurement of income inequality. *The American Economic Review*, American Economic Association, n. 1, mar. 1951. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/1815968>. Acesso em: 10 jan. 2022.

TENDLER, S. *Encontro com Milton Santos: o mundo global visto do lado de cá*. Direção: Silvio Tandler. Produção: Ana Rosa Tandler. Roteiro: Claudio Bojunga, Silvio Tandler, Andre Alvarenga, Miguel Lindenberg, Ecatherina Brasileiro e Daniel Tandler. Interpretes: Beth Goulart; Fernanda Montenegro; Matheus Nachtergaele; Milton Gonçalves e Osmar Prado. [S.l.]: Caliban Cinema e Conteudo, 2006. 1 filme (190 min).

WILKSON, R.; PICKETT, K. *O nível: Por que uma sociedade mais igualitária é melhor para todos*. 1. ed. [S.l.]: Civilização Brasileira, 2015.

APÊNDICE A – Procedimento de geração dos dados usados nos exemplos

Conforme Ross (2010), uma função real estabelecida no espaço amostral Ω de um experimento aleatório tem distribuição uniforme no intervalo (a, b) , sendo $a < b \in R$ os parâmetros da distribuição, caso sua função de densidade de probabilidade seja dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a,b) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A amostra em questão foi gerada sob a distribuição uniforme padrão com $a = 0$ e $b = 1$. Uma função foi criada no R Studio tendo como parâmetros o total da renda e o tamanho da população. Aplicou-se, enquanto o acumulado da renda de doze indivíduos fosse igual ou inferior a renda total ou cada um recebesse uma renda, o valor da renda de cada um como o produto entre o resultado de uma distribuição uniforme padrão para um vetor de uma unidade e a diferença entre o total da renda da população e o valor acumulado até o momento. A função foi aplicada para uma população de doze indivíduos e renda total de R\$13.000,00 e foi feito um arredondamento para duas casas decimais.

APÊNDICE B – Cálculos intermediários para o coeficiente de Gini

Recordando-se que $\phi_0 = 0$ e utilizando-se a equação (2.2), segue mostrada na Tabela 11 a associação entre $\phi_i + \phi_{i-1}$ e a renda de cada indivíduo.

Tabela 11: Associação entre as somas da proporção acumulada de renda de dois indivíduos sucessivos e as rendas individuais

i	$N\mu(\phi_i + \phi_{i-1})$
1	x_1
2	$2x_1 + x_2$
3	$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$
\vdots	\vdots
N-1	$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \dots + x_{N-1}$
N	$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \dots + 2x_{N-1} + x_N$

$$G = 1 - \frac{1}{N^2\mu} [(2N-1)x_1 + (2N-3)x_2 + \dots + 3x_{N-1} + x_N] \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N (2N-2i+1)x_i \\ &= 1 + \left[-\frac{1}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N 2Nx_i + \frac{1}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N 2ix_i - \frac{1}{N^2\mu} x_i \right] \\ &= \frac{2}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N ix_i - \frac{1}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N (2N+1)x_i + 1 \\ &= \frac{2}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N ix_i - \frac{(2N+1)N\mu}{N^2\mu} + 1 \\ &= \frac{2}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N ix_i - \left(1 + \frac{1}{N} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

A partir da expressão (2.6) é possível reescrever o índice de Gini como

$$G = \frac{2}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N ix_i - \left(1 + \frac{1}{N} \right)$$

Além disso, por definição, a diferença absoluta média para (x_1, x_2, \dots, x_N) é dada por

$$\Delta = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |x_i - x_j|$$

Com o auxílio de manipulações matemáticas, obtém-se

$$\Delta = \frac{4}{N^2} \sum_{i=1}^N ix_i - 2\mu \left(1 + \frac{1}{N} \right)$$

e essa, comparada à expressão 2.8, torna possível o cálculo do índice de Gini por meio de

$$G = \frac{\Delta}{2\mu}$$

APÊNDICE C – Exemplo de cálculo das medidas de desigualdade descritas em Dalton (1920)

Para os dados da Tabela 1, considerando-se a renda mínima para a subsistência igual a R\$300,00 para a qual $w(300) = 0$, tem-se que:

$$\bar{x}_a = \frac{5.269,93+4.013,60+855,48+507,45+82,56+61,28+48,51}{12} = \frac{10.838,81}{12} = 903,234$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[12]{5.269,93 \times 4.013,60 \times 855,48 \times 507,45 \times 82,56 \times 61,28 \times 48,51} = \sqrt[12]{2,253 \times 10^{18}} = 33,839$$

Assim, para $w = \log(x) + c$, tem-se que:

$$d = \frac{\log(\bar{x}_a)+c}{\log(\bar{x}_g)+c} = \frac{\log(903,234)+300}{\log(33,839)+300} = \frac{302,956}{301,530} = 1,005$$

Além disso, segue-se que:

$$\bar{x}_h = \frac{12}{\frac{1}{5.269,93} + \frac{1}{4.013,60} + \frac{1}{855,48} + \frac{1}{507,45} + \frac{1}{82,56} + \frac{1}{61,28} + \frac{1}{48,51} + \frac{1}{274,57} + \frac{1}{282,67} + \frac{1}{293,44} + \frac{1}{294,26} + \frac{1}{299,08}} = \frac{12}{0,035} = 342,857$$

$$d = \frac{c - \frac{1}{\bar{x}_a}}{c - \frac{1}{\bar{x}_h}} = \frac{300 - \frac{1}{903,234}}{300 - \frac{1}{342,857}} = 0,379$$

APÊNDICE D – Teorema de estatísticas que seguem a distribuição χ^2

Pode-se reescrever a variável padronizada como

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma(\hat{\beta}_1)} \doteq \frac{s(\hat{\beta}_1)}{\sigma(\hat{\beta}_1)}$$

Denominando-se o numerador como z , segue-se que:

$$\frac{s^2(\hat{\beta}_1)}{\sigma(\hat{\beta}_1)} = \frac{\frac{MSE}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}}{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}} = \frac{MSE}{\sigma^2} = \frac{SSE}{\frac{N-2}{\sigma^2}} = \frac{SSE}{\sigma^2(N-2)} \sim \frac{\chi_{(N-2)}^2}{N-2}$$

Logo,

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s(\hat{\beta}_1)} \sim \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi_{(N-2)}^2}{N-2}}}$$

Como z é uma função do estimador $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_1$ não depende da expressão SSE barra $\sigma^2 \sim \chi^2$, z e $\chi_{(N-2)}^2$ são independentes. A partir disso, conclui-se que

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s(\hat{\beta}_1)} \sim \tag{D.1}$$

APÊNDICE E – Especificações e script das funções utilizadas para a definição dos municípios mais ricos que foram utilizados

A função *ricos_var* possuía como argumentos o *p-valor* definido como 0,05; um inteiro representando o número de municípios que seria mantido na regressão e um *data frame* que possuía a variável renda *per capita* na primeira coluna e as variáveis respostas, como mortalidade infantil e esperança de vida, nas outras.

Essa função é executada a partir dos resultados das regressões de cada variável resposta com a renda *per capita* para a quantidade de municípios definida e retorna a primeira quantidade de municípios que obtiveram *p-valor* maior do que o resultante da regressão. Assim, juntamente ao conhecimento dos dados obtido a partir da análise descritiva, usou-se essas funções baseando-se no critério de que o argumento de número de municípios era muito grande caso o retorno fosse o número total de municípios da base utilizada para que fosse realizada a separação entre ricos e pobres sob a avaliação do coeficiente angular igual a zero.

APÊNDICE F – Gráficos de dispersão de cada variável explicativa com as medidas de desigualdade

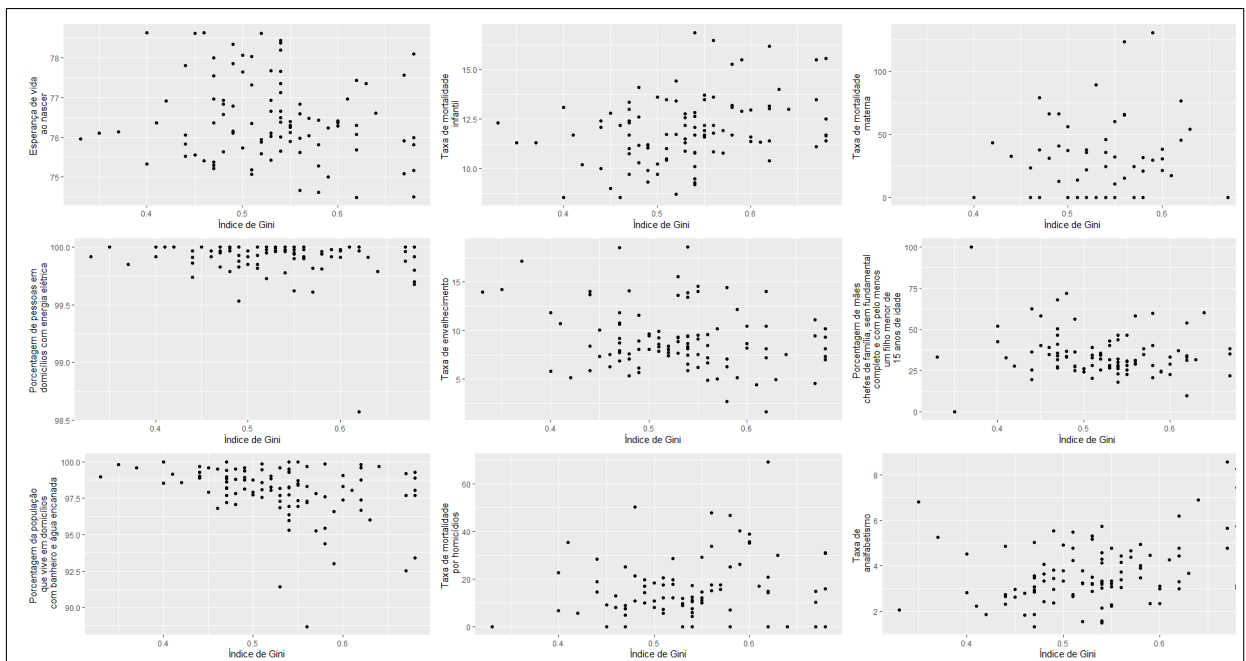


Figura 15: Gráficos de dispersão de cada variável resposta com o índice de Gini

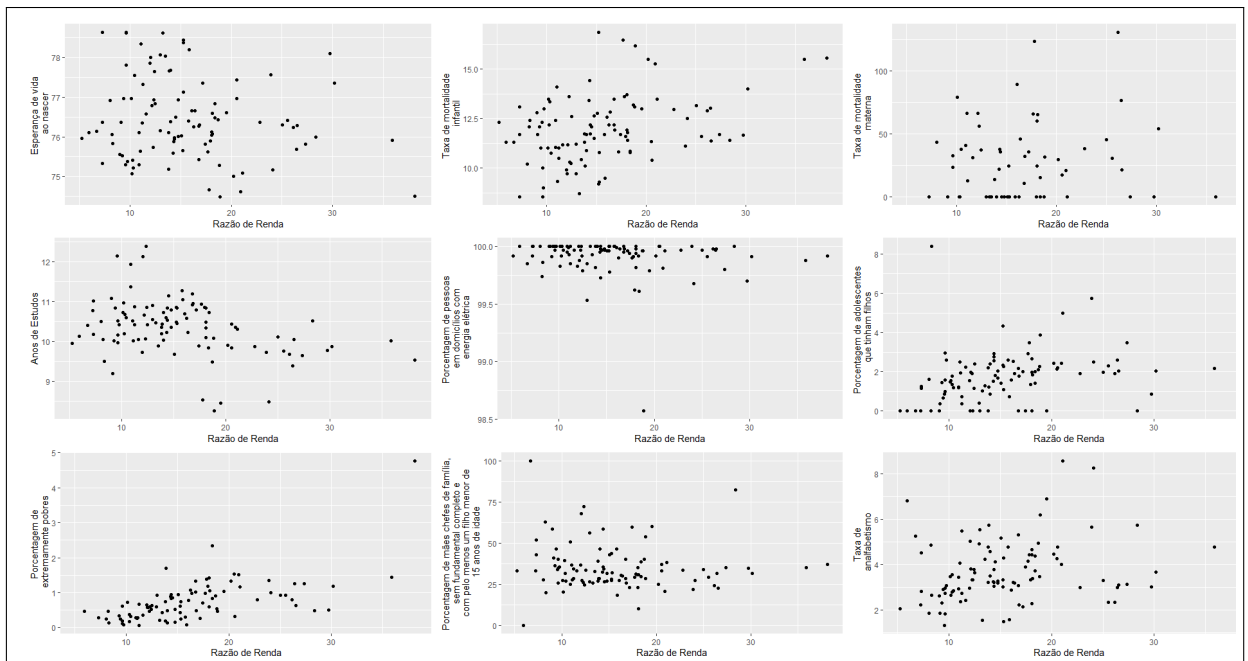


Figura 16: Gráficos de dispersão de cada variável resposta com a razão de renda

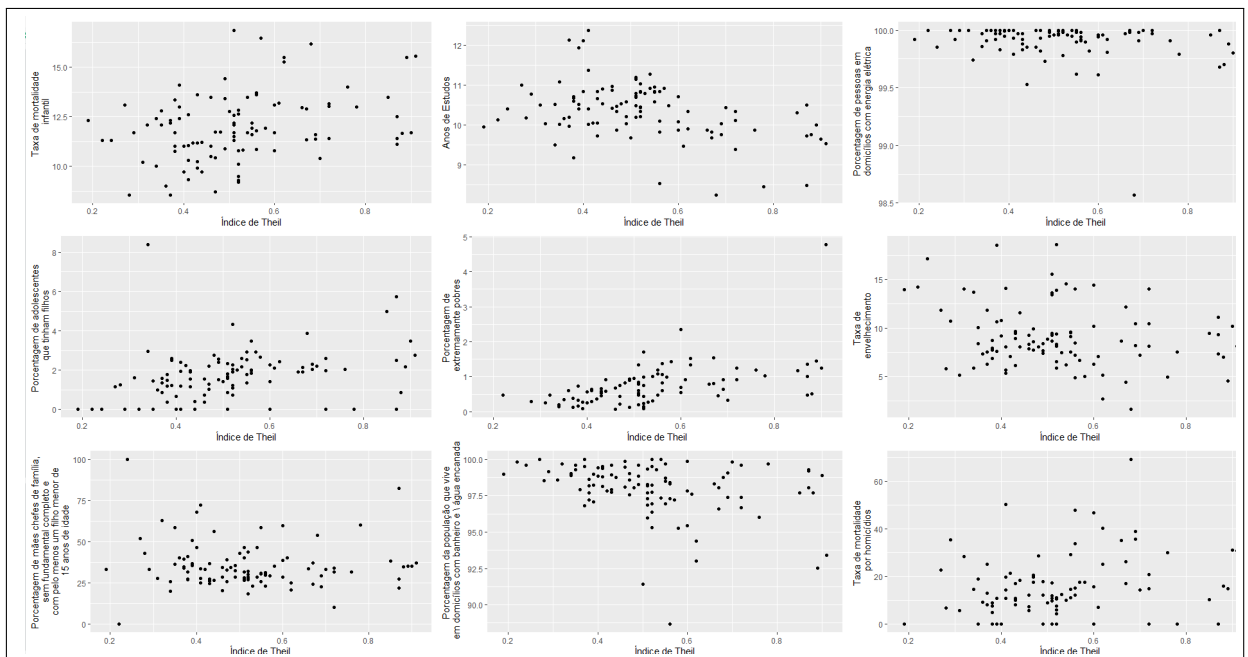


Figura 17: Gráficos de dispersão de cada variável resposta com o índice de Theil

ANEXO 1 – Considerações sobre $w(x)$

Algumas considerações sobre $w(x)$ são:

- numa população com apenas duas pessoas, qualquer transferência da mais rica para a mais pobre (que não seja superior à diferença de renda entre elas) produzirá uma distribuição com menor desigualdade;
- a transferência que atinge a igualdade máxima é a metade da diferença de renda entre as duas pessoas;
- ainda que sejam consideradas mais pessoas, qualquer transferência entre duas delas, na forma estabelecida anteriormente, produzirá mais igualdade. É possível que, na comparação de duas distribuições nas quais a renda total e o total populacional estejam fixos, uma possa ser alcançada a partir da outra por sucessivas transferências. Nesse caso, é possível afirmar que a desigualdade de uma era menor que a da outra.