

Ana Carolina Cavallo Heringer

**Análise de risco do mercado financeiro
americano utilizando Teoria de Valores
Extremos**

Niterói - RJ, Brasil

21 de julho de 2022

Ana Carolina Cavallo Heringer

**Análise de risco do mercado
financeiro americano utilizando
Teoria de Valores Extremos**

Trabalho de Conclusão de Curso

Monografia apresentada para obtenção do grau de Bacharel em
Estatística pela Universidade Federal Fluminense.

Orientador(a): Prof. Dr. Marco Aurélio dos Santos Sanfins

Co-Orientador(a): Profa. Ma. Daiane de Souza Oliveira

Niterói - RJ, Brasil

21 de julho de 2022

Ana Carolina Cavallo Heringer

**Análise de risco do mercado financeiro
americano utilizando Teoria de Valores
Extremos**

Monografia de Projeto Final de Graduação sob o título “*Análise de risco do mercado financeiro americano utilizando Teoria de Valores Extremos*”, defendida por Ana Carolina Cavallo Heringer e aprovada em 21 de julho de 2022, na cidade de Niterói, no Estado do Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Marco Aurélio dos Santos Sanfins
Departamento de Estatística – UFF

Profa. Ma. Daiane de Souza Oliveira
Departamento de Métodos Estatísticos – UFRJ

Profa. Dra. Karina Yuriko Yaginuma
Departamento de Estatística – UFF

Prof. Dr. Valentin Sisko
Departamento de Estatística – UFF

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

H546a Heringer, Ana Carolina Cavallo
Análise de risco do mercado financeiro americano utilizando
Teoria de Valores Extremos / Ana Carolina Cavallo Heringer ;
Marco Aurélio dos Santos Sanfins, orientador ; Daiane de
Souza Oliveira, coorientadora. Niterói, 2022.
39 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em
Estatística)-Universidade Federal Fluminense, Instituto de
Matemática e Estatística, Niterói, 2022.

1. Teoria de valores extremos. 2. Risco. 3. Bolsas de
valores. 4. VaR. 5. Produção intelectual. I. Sanfins, Marco
Aurélio dos Santos, orientador. II. Oliveira, Daiane de
Souza, coorientadora. III. Universidade Federal Fluminense.
Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDD -

Resumo

No mercado financeiro é de extrema importância se proteger das perdas extremas. Investidores e instituições financeiras de todo o mundo utilizam medidas de risco como, por exemplo, o *Value-at-risk* (VaR), para mensurar e se prevenir contra o risco de mercado presente nos ativos. O presente trabalho tem como principal objetivo utilizar a Teoria de Valores Extremos (TVE) para estimar a distribuição dos retornos financeiros e calcular o VaR, em comparação com outras metodologias tradicionais existentes na literatura: VaR Normal (paramétrico) e VaR histórico (não paramétrico). A abordagem paramétrica se baseia no conhecimento - ou suposição - da distribuição dos retornos, neste caso, a distribuição Normal. Em contrapartida, a abordagem não paramétrica consiste em utilizar a série histórica dos retornos para estimar as perdas financeiras. A capacidade de previsão dos modelos será avaliada pelo *backtest* de Kupiec, um teste estatístico conhecido como teste de proporção de falhas. A modelagem é feita com séries de preços de fechamento de três dos principais índices do mercado de ações americano: Dow Jones Industrial Average, Nasdaq Composite e New York Stock Exchange. Como resposta ao principal questionamento desta pesquisa, foi observado que o VaR Normal não possui boa adequação às caudas da distribuição, concluindo que a modelagem através da TVE pode ser vantajosa em relação a metodologia Normal.

Palavras-chave: Teoria de valores extremos. Risco. Bolsas de valores. VaR.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha mãe, Elizabeth, com todo o meu amor e gratidão por me apoiar e me dar forças a todo momento.

Agradecimentos

A Deus, pela minha vida, e por me manter firme ao longo desses anos.

Aos meus familiares, que são minha base e me deram condições e incentivo para chegar até aqui. Vocês foram essenciais para a realização deste trabalho.

A Gabriela Monteiro, minha companheira não só de curso, mas de vida; sem ela, eu não estaria na estatística e muito menos na UFF.

Ao meu querido orientador, professor Dr. Marco Aurélio dos Santos Sanfins, e a minha brilhante co-orientadora, Mestra Daiane de Souza Oliveira, por terem desempenhado esta função com tanta dedicação e carinho, me proporcionando tamanho aprendizado.

A todos os professores do Departamento de Estatística, que são grandes profissionais e transmissores de conhecimento. Em especial à professora e coordenadora Dra. Ana Maria Lima de Farias, responsável por me ensinar teoria das Probabilidades e por tantas orientações ao longo do curso.

Aos membros da banca, Profa. Dra. Karina Yuriko Yaginuma e Prof. Dr. Valentin Sisko, por terem aceitado participar e contribuir com o trabalho.

Por último, mas não menos importante, aos colegas de curso. Companheiros de estudo, do projeto de extensão, monitores e até alunos de monitoria que viraram amigos: Lucas Mattos, Isabela Granja, Iasmyn Lugon, Gabriel Miranda, Leonardo Barcellos e Aline D'Avila.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 11
1.1	Revisão da Literatura	p. 12
1.2	Objetivos	p. 14
1.3	Organização	p. 14
2	Materiais e Métodos	p. 15
2.1	Teoria de Valores Extremos	p. 15
2.2	Estimação	p. 19
2.2.1	Método da Máxima Verossimilhança (MMV)	p. 20
2.3	<i>Value-at-risk</i> (VaR)	p. 20
2.3.1	Técnicas de estimação do VaR	p. 21
2.4	Testes Estatísticos	p. 23
2.4.1	Teste de Ljung-Box	p. 23
2.4.2	Teste de Adequação a Distribuição Gumbel	p. 24
2.4.3	Teste de Proporção de Falhas	p. 25
3	Análise dos Resultados	p. 27
3.1	Dados	p. 27
3.2	Análises	p. 27

4 Conclusões	p. 37
Referências	p. 38
Apêndice 1 – Análises utilizando o <i>software</i> R	p. 41

Lista de Figuras

1	Densidades da Gumbel, Fréchet e Weibull.	p. 18
2	Máximos por blocos.	p. 19
3	Representação do VaR Normal para um nível de confiança de $100 \times (1 - \alpha)\%$	p. 21
4	Representação do VaR histórico com $\alpha = 5\%$	p. 23
5	Preços de fechamento - Dow Jones.	p. 28
6	Preços de fechamento - NASDAQ.	p. 28
7	Preços de fechamento - NYSE.	p. 29
8	Evolução dos índices americanos.	p. 29
9	Retornos logarítmicos dos índices americanos	p. 30
10	Ajuste para a distribuição dos mínimos - Dow Jones.	p. 33
11	Ajuste para a distribuição dos mínimos - NASDAQ.	p. 34
12	Ajuste para a distribuição dos mínimos - NYSE.	p. 35

Lista de Tabelas

1	Valores críticos para a estatística $\sqrt{n}D$	p. 24
2	Regiões de não rejeição do Teste de Kupiec.	p. 26
3	P-valor associado ao Teste de Ljung-Box, por índice, para cada <i>lag</i> . . .	p. 31
4	Parâmetros estimados da GEV.	p. 32
5	Resultados do Teste de Kupiec.	p. 36

1 Introdução

O mercado financeiro é um ambiente de comercialização de produtos financeiros, como ações, títulos públicos, debêntures, entre outros ativos. Estas operações são de grande importância para a economia, principalmente por possibilitar o desenvolvimento de empresas e instituições, e ao mesmo tempo, trazer rentabilidade para os investidores.

Nos investimentos de renda variável, é importante se atentar à variação nos preços dos ativos, que é conhecido como risco de mercado. Nesse contexto, há uma grande necessidade de se proteger contra grandes perdas, que podem ser catastróficas. Com o passar do tempo, muitas empresas e investidores compreenderam tal necessidade e procuraram maneiras de gerenciar o risco de mercado.

Em outubro de 1994 foi revelada a metodologia de J.P. Morgan (MORGAN, 1996), denominada de *RiskMetrics*[™], que foi criada com o objetivo de quantificar o risco de um investimento. Segundo Phelan (1997), após o lançamento do *RiskMetrics*[™], investidores e instituições financeiras de todo o mundo adotaram esta metodologia ou desenvolveram novos métodos para se prevenir de eventuais riscos e perdas extremas.

Com a evolução das métricas de mensuração de risco, ficou popularmente conhecido o *Value-at-Risk* (VaR), que é um dos principais métodos para medir o risco de mercado ao qual um ativo e/ou carteira estão sujeitos. O VaR é um indicador probabilístico, representado por um número real, e é caracterizado por Chen (2012) como uma perda financeira máxima esperada para um certo período de tempo, com um determinado nível de confiança. Existem diferentes modelos para o cálculo do VaR na literatura, que são divididos em dois grandes grupos: VaR paramétrico e VaR não paramétrico. Na abordagem paramétrica são feitas hipóteses sobre a distribuição dos retornos financeiros¹. Em contrapartida, a abordagem não paramétrica consiste em utilizar a série histórica dos retornos para estimar as perdas financeiras.

Pesquisas recentes realizaram estudos comparativos abordando diferentes técnicas

¹Medida financeira que demonstra o ganho (ou perda) de um investimento, em determinado período.

para o cálculo do VaR. Chun (2007), Caselato (2009) e Silva (2018) não consideraram a Teoria de Valores Extremos (TVE) e, como resultado, apresentam o VaR não paramétrico por simulação histórica como sendo o mais conservador; isto é, tendo menor probabilidade de se ter uma perda além da esperada. Considerando que os eventos extremos podem causar uma grande variação nos preços de um investimento, é importante que haja maior eficiência na modelagem dos retornos. Portanto, há uma grande necessidade de melhorar tal modelagem, com o objetivo de captar, com maior acurácia, eventos extremos no mercado de ações.

Neste contexto, segundo Jesús, Ortiz e Cabello (2013), a TVE pode ser muito útil, principalmente pela característica das suas distribuições de probabilidade, que possuem caudas com maior massa de probabilidade (caudas pesadas). Assim, apesar de haver uma maior complexidade matemática, as probabilidades atribuídas aos eventos raros podem ser consideradas mais realistas. Com a motivação de melhorar a modelagem dos retornos e sendo notada a pouca utilização desta metodologia na literatura, o presente trabalho consiste na mensuração do risco no mercado de ações americano, realizada através da comparação de três métodos de cálculo de VaR, sendo eles: VaR normal, VaR por extremos e VaR histórico. Estes métodos foram aplicados aos índices Dow Jones Industrial Average, NASDAQ Composite e New York Stock Exchange (NYSE). Posteriormente, foi realizado um teste de aderência para os modelos de VaR, mais conhecido como Teste de Proporção de Falhas de Kupiec (1995), com o objetivo de testar se o número de exceções ao VaR (perdas acima do VaR) está dentro de um intervalo de aceitação, calculado para diferentes probabilidades de cauda, identificando se o modelo captura as violações de forma eficiente ou não.

1.1 Revisão da Literatura

A Teoria de Valores Extremos (TVE) tem despertado interesse em diferentes áreas de pesquisa em que há a necessidade de estudar a ocorrência de eventos raros. Segundo Mendes (2004), a TVE é um ramo da probabilidade que estuda os valores extremos - máximos e mínimos - de um conjunto de variáveis aleatórias de uma mesma distribuição de probabilidade.

Ainda segundo Mendes (2004), após a apresentação dos principais conceitos da TVE, as primeiras aplicações da teoria surgiram no estudo de fenômenos meteorológicos, mensurando níveis anuais de inundações nos Estados Unidos. De fato, a TVE ganhou populari-

dade em áreas de pesquisa sobre fenômenos naturais, tais como inundações, temperaturas extremas, terremotos, etc. Alguns exemplos de trabalhos recentes nesta área são: Cheng et al. (2014), que estima níveis de retorno estacionários e não estacionários, períodos de retorno e riscos de desastres climáticos, utilizando dados de temperaturas máximas anuais; Rootzén e Katz (2013), que propõe um conceito que quantifica os riscos em um clima não estacionário, e motiva a aplicação para gerenciamento de risco hidrológico; e Ward et al. (2013), que desenvolveu e validou um modelo com o objetivo de evitar inundações globais, com base em vários períodos de retorno de inundação.

Além dessas áreas de aplicação, a TVE tem se tornado, cada vez mais, uma técnica de extrema importância na área de finanças. Oliveira, Sanfins e Santos (2020) empregou a TVE para modelar a série financeira PETR4.SA (Petróleo Brasileiro S.A. – Petrobras) com o objetivo de melhorar a gestão de risco e evitar perdas adicionais. Os retornos foram modelados pela distribuição Gumbel e, além disso, foi utilizado o Teste de Kupiec para avaliar a capacidade do ajuste, obtendo como resultado um modelo bem estimado, útil no estudo de eventos de perdas extremas no mercado financeiro. Outras aplicações são Nortey, Asare e Mettle (2015), que modela os valores extremos do índice de todas as ações da bolsa de valores de Gana, e Gamba-Santamaria, Jaulin-Mendez et al. (2016), que compara diferentes técnicas para calcular medidas de risco (VaR e CVaR) com o objetivo de identificar os cenários em que tais técnicas funcionam adequadamente.

Em pesquisas mais recentes, Maluf e Asano (2019) verificaram quais modelos para o VaR são adequados para o principal índice do mercado de ações brasileiro (IBOVESPA), considerando modelos de volatilidade incondicional - como através da TVE e da simulação histórica - e condicional (GARCH e IGARCH) dos retornos. Os resultados mostraram que os modelos da família GARCH foram os mais adequados, indicando a importância de incluir a possibilidade de se ter uma volatilidade condicional; ou seja, uma volatilidade que varia no decorrer do tempo. Já Williams, Heerden e Conradie (2018) e Tolikas (2008) obtiveram bons resultados com o uso da TVE para cálculo do VaR, em comparação com várias outras metodologias, incluindo a família GARCH e simulação histórica, principalmente para quantis mais extremos, como 0,1%.

No contexto da amostra aleatória extrema, necessária para a aplicação da TVE, são consideradas duas maneiras distintas de fazer tal coleta: Máximos (ou mínimos) por blocos, conhecida como *Block Maxima Method* (BMM) e Máximos acima de um limiar ou mínimos abaixo de um limiar, conhecida por *Peak Over Threshold Method* (POT). O trabalho de Mwamba, Hammoudeh e Gupta (2017) compara tais métodos, que caracterizam

dois tipos de distribuições de valores extremos: a distribuição Generalizada de Valores Extremos (GEV) e a distribuição Generalizada de Pareto (GPD), respectivamente. Estes métodos foram aplicados para modelar os riscos de cauda financeira associados aos retornos diários de diferentes índices como Dow Jones Islamic market, S&P 500, S&P Europe (SPEU) e Asian S&P (SPAS50). Os resultados sugerem que para todos os retornos de ações o método BMM tem um desempenho melhor do que o método POT.

1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo principal utilizar a TVE como alternativa para melhorar a gestão do risco de mercado. Utilizando séries do mercado de ações americano, tem-se como objetivos secundários:

- (i) estimar, através da TVE, a distribuição dos mínimos das séries de retornos financeiros (perdas);
- (ii) analisar a qualidade do ajuste à distribuição, através de testes estatísticos e análises gráficas;
- (iii) comparar o VaR obtido pela TVE com outras duas metodologias tradicionais de cálculo do VaR: VaR normal e VaR histórico, e
- (iv) testar se o número de violações ao VaR está dentro de um intervalo de aceitação para diferentes níveis de cobertura, identificando qual(is) modelo(s) captura(m) as violações de forma mais eficiente.

1.3 Organização

O trabalho se divide em quatro capítulos. O Capítulo 2 aborda os principais recursos utilizados para o desenvolvimento do trabalho: a Teoria de Valores Extremos, a medida de risco utilizada (*Value-at-Risk*), e apresenta os testes estatísticos que serão aplicados. Em seguida, o Capítulo 3 apresenta os resultados das análises e o Capítulo 4, a conclusão. Por fim, estão listadas as Referências Bibliográficas utilizadas nesta monografia.

2 Materiais e Métodos

2.1 Teoria de Valores Extremos

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias (v.a.'s) independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com função de distribuição (f.d.) F_X .

Definição 2.1. (*Estatísticas de Ordem*) As estatísticas de ordem relacionadas à amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n são as variáveis aleatórias $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$, onde temos que, obrigatoriamente, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$. Logo, representamos o mínimo e o máximo da seguinte forma:

$$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (2.1)$$

$$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (2.2)$$

É possível encontrar as funções de distribuição do mínimo e do máximo de forma analítica.

Teorema 2.1. Sejam X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória com função de distribuição F_X . As funções de distribuição exatas do mínimo e do máximo são dadas por:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n, \quad x \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F_X(x)]^n, \quad x \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

Demonstração. (*Função de distribuição do mínimo*)

$$\begin{aligned}
 F_{X_{(1)}}(x) &= P(X_{(1)} \leq x) \\
 &= 1 - P(X_{(1)} > x) \\
 &= 1 - P(X_1 > x, \dots, X_n > x) \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_{X_i}(x)] \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_X(x)] \\
 &= 1 - [1 - F_X(x)]^n
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Demonstração. (*Função de distribuição do máximo*)

$$\begin{aligned}
 F_{X_{(n)}}(x) &= P(X_{(n)} \leq x) \\
 &= P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\
 &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x) \\
 &= \prod_{i=1}^n F_X(x) \\
 &= [F_X(x)]^n
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

As igualdades (2.5) e (2.7) são atribuídas pelo fato de que as v.a.'s X_1, X_2, \dots, X_n são independentes, e as igualdades (2.6) e (2.8) por X_i serem identicamente distribuídas.

Proposição 2.1. *Pode-se obter a distribuição do mínimo utilizando a seguinte relação:*

$$\min(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\max(-X_1, -X_2, \dots, -X_n). \tag{2.9}$$

Na prática, multiplica-se os dados por (-1) e analisa-se os máximos.

Os fundamentos da TVE, apresentados por Fisher e Tippett (1928), introduziram os três tipos de distribuição assintótica de valores extremos, sendo elas: Gumbel, Fréchet e Weibull. A base deste estudo surgiu com o Teorema Fundamental de Fisher-Tippett, que resulta numa convergência fraca para os máximos após serem normalizados.

Teorema 2.2. (Teorema Fundamental de Fisher-Tippett) Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Se existirem seqüências de constantes normalizadoras $c_n > 0$, $d_n \in \mathbb{R}$ e uma distribuição não degenerada H tal que

$$\frac{X_{(n)} - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H, \quad (2.10)$$

onde \xrightarrow{d} representa a convergência em distribuição, então H é um dos três tipos de distribuição:

1. Gumbel:

$$H_I(x) = \exp\{-e^{-x}\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

2. Fréchet:

$$H_{II,\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & , x > 0, \alpha > 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

3. Weibull:

$$H_{III,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{-\alpha}\} & , x \leq 0, \alpha < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

As funções de densidade das distribuições de valores extremos, por definição, são obtidas através da diferenciação das respectivas funções de distribuição, de tal forma que:

1. Gumbel:

$$\begin{aligned} h_I(x) &= \frac{d H_I(x)}{dx} \\ &= \frac{d [\exp\{-e^{-x}\}]}{dx} \\ &= (\exp\{-e^{-x}\}) (-e^{-x}) (-1) \\ &= H_I(x) e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Fréchet:

$$\begin{aligned} h_{II,\alpha}(x) &= \frac{d H_{II,\alpha}(x)}{dx} \\ &= \frac{d [\exp\{-x^{-\alpha}\}]}{dx} \\ &= (\exp\{-x^{-\alpha}\}) (\alpha x^{-(\alpha+1)}) \\ &= \alpha H_{II,\alpha}(x) x^{-(\alpha+1)}, \quad x \geq 0, \alpha > 0. \end{aligned}$$

3. Weibull:

$$\begin{aligned}
h_{III,\alpha}(x) &= \frac{dH_{III,\alpha}(x)}{dx} \\
&= \frac{d[\exp\{-(-x)^{-\alpha}\}]}{dx} \\
&= (\exp\{-(-x)^{-\alpha}\}) \alpha ((-x)^{-(\alpha+1)}) (-1) \\
&= |\alpha| H_{III,\alpha}(x) (-x)^{-(\alpha+1)}, \quad x \leq 0, \quad \alpha < 0.
\end{aligned}$$

A Figura 1 mostra as densidades da Gumbel, Fréchet (com $\alpha = 2$) e Weibull (com $\alpha = -2$).

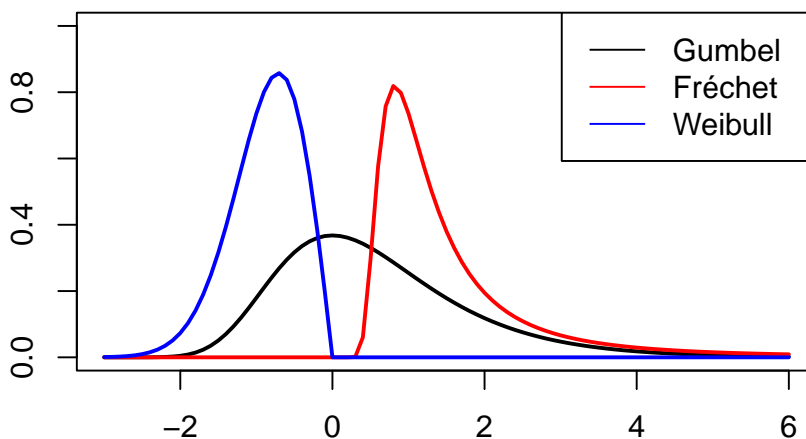


Figura 1: Densidades da Gumbel, Fréchet e Weibull.

(Fonte: Criação própria).

A distribuição de valores extremos generalizada (GEV), apresentada por Jenkinson (1955), representa os três tipos de distribuições, mencionados em (2.11), (2.12) e (2.13), como uma única distribuição. A função de distribuição da GEV, que depende de um único parâmetro ξ , chamado de parâmetro de forma ou índice de cauda, é dada por:

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\} & , \xi \neq 0 \text{ e } 1 + \xi x > 0 \\ \exp\{-\exp\{-x\}\} & , \xi = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Caso $\xi = 0$, H_ξ se refere à distribuição Gumbel. Quando $\xi > 0$, a distribuição correspondente é a Fréchet e quando $\xi < 0$ tem-se que H_ξ se adequa à Weibull. A família de locação e escala, apresentada por $H_{\xi,\mu,\sigma}$, é construída ao substituir x por $(x - \mu)/\sigma$, para $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$.

A função de densidade da distribuição GEV, que foi introduzida por Jenkinson (1955), pode ser encontrada ao derivar $H_{\xi,\mu,\sigma}$. Considerando $\mu = 0$, temos que:

$$h_{\xi,\sigma}(y) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1 + \xi\frac{y}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right\} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi\frac{y}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} & , \xi < 0 \text{ e } -\infty < y < (-\sigma/\xi); \\ & \text{ou } \xi > 0 \text{ e } y \geq (-\sigma/\xi) \\ \exp\left\{-\exp\left\{\frac{-y}{\sigma}\right\}\right\} \frac{1}{\sigma} \exp\{-y\} & , \xi = 0 \text{ e } y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.15)$$

2.2 Estimação

Para realizar todo o processo de estimação, será utilizado o Método do Bloco Máximo, ou *Block Maxima Method* (BMM). Este método foi criado pois, para uma determinada amostra aleatória, existe um único valor máximo. Sendo assim, não seria possível estimar os três parâmetros da GEV (μ, σ, ξ) com apenas uma observação extrema. O método consiste em dividir o período de observação em períodos não sobrepostos de igual tamanho. Logo, a amostra aleatória original pode ser dividida em m blocos, cada um com k observações. Em seguida, pode-se obter os máximos de cada bloco, como ilustrado na Figura 2, e então utilizar a TVE para estimar a distribuição dos máximos; e conseqüentemente, os parâmetros da GEV (COLES, 2001).

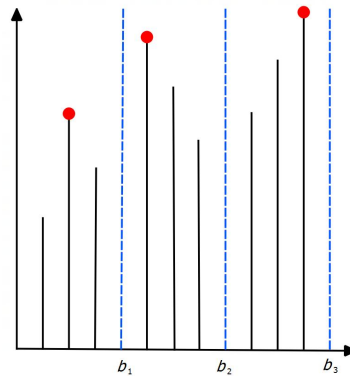


Figura 2: Máximos por blocos.

(Fonte: Criação própria).

2.2.1 Método da Máxima Verossimilhança (MMV)

Existem vários procedimentos estatísticos usados para realizar a estimação de parâmetros. Será utilizado o Método da Máxima Verossimilhança por ser um dos mais usados e por possuir boas propriedades.

Os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) para os parâmetros (ξ, μ, σ) , denotados por $(\hat{\xi}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$, são valores em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, respectivamente, que são obtidos ao maximizar a função de verossimilhança, dada por:

$$L(\xi, \mu, \sigma; (m_1, \dots, m_m)) = \prod_{i=1}^m h_{\xi, \mu, \sigma}(m_i) I_{1 + \frac{\xi}{\sigma}(m_i - \mu) > 0}. \quad (2.16)$$

onde m_1, \dots, m_m é uma amostra de m máximos.

Na prática, geralmente utiliza-se o logaritmo desta função. A função de log-verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} l(\xi, \mu, \sigma; (m_1, \dots, m_m)) &= \log \prod_{i=1}^m h_{\xi, \mu, \sigma}(m_i) I_{1 + \frac{\xi}{\sigma}(m_i - \mu) > 0} \\ &= \sum_{i=1}^m \log \left[h_{\xi, \mu, \sigma}(m_i) I_{1 + \frac{\xi}{\sigma}(m_i - \mu) > 0} \right]. \end{aligned}$$

2.3 Value-at-risk (VaR)

A literatura, na área da gestão de risco financeiro, define o VaR como a perda máxima esperada de uma carteira para um certo período de tempo, com um determinado nível de confiança. (JORION, 2007)

Sob o olhar estatístico, o VaR é definido como um quantil q da distribuição de retornos financeiros (X), sendo excedido com uma certa probabilidade α (TOLIKAS, 2008). Uma ilustração do VaR pode ser vista na Figura 3.

Matematicamente,

$$VaR_{\alpha}(X) = \min\{q : P(-X > q) \leq \alpha\}. \quad (2.17)$$

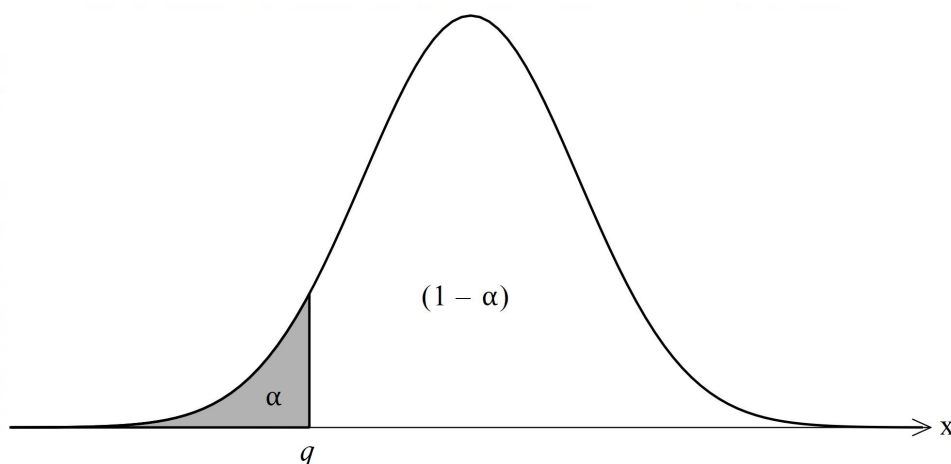


Figura 3: Representação do VaR Normal para um nível de confiança de $100 \times (1 - \alpha)\%$.

(Fonte: Criação própria).

Exemplo 2.1. *(Retirado do Livro Mercado Financeiro, de Neto (2014)) Uma instituição financeira pode apurar que o VaR de sua carteira, para um determinado mês, é de R\$ 20 milhões, a um grau de confiança estabelecido de 97%. Esta medida apurada indica que há 3% de probabilidade de ocorrerem perdas na carteira superiores a R\$ 20 milhões, ou 97% de chance de se verificarem perdas máximas de R\$ 20 milhões, no intervalo definido de um mês.*

Há algumas metodologias para o cálculo do VaR, das quais se destacam: a histórica e a paramétrica. O VaR paramétrico parte da premissa de que a distribuição dos retornos é conhecida. O mais utilizado é o VaR Normal, ilustrado na Figura 3, onde assume-se que a série de retornos é proveniente de uma distribuição normal, o que nem sempre é verdade. Já o VaR histórico não necessita supor que a distribuição dos retornos é conhecida; o cálculo é realizado utilizando os retornos históricos para estimação das perdas financeiras.

Alguns estudos científicos, como Tolikas (2008), afirmam que as distribuições dos retornos de séries financeiras possuem caudas pesadas, principalmente em momentos de crise financeira. Tal característica não se aplica na distribuição normal, e esse fato pode atrapalhar a captura das ocorrências extremas na distribuição dos retornos. Segundo Goncu, Akgul et al. (2012), dentro da hipótese de normalidade, a modelagem pode subestimar o VaR, tendo em vista que a distribuição normal possui caudas leves.

2.3.1 Técnicas de estimação do VaR

- VaR Normal:

O método paramétrico é baseado em uma suposição sobre a distribuição dos retornos financeiros. O VaR Normal, então, supõe que os retornos seguem uma distribuição normal. Portanto, o VaR é calculado como o quantil α desta distribuição.

$$VaR_{\alpha}(X) = \hat{\mu} + \hat{\sigma}\Phi^{-1}(\alpha) \quad (2.18)$$

onde $\Phi^{-1}(\alpha)$ é o quantil α da distribuição normal padrão, $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ são os valores estimados da média e do desvio-padrão, respectivamente.

- VaR por Extremos:

Já o VaR estimado pela TVE pressupõe que os retornos são provenientes da distribuição de valores extremos (GEV), e o cálculo é feito da seguinte forma:

$$VaR_{\alpha}(X) = \begin{cases} \hat{\mu} - \hat{\sigma} \ln(-\ln(1 - \alpha)) & , \hat{\xi} = 0 \\ \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[(-\ln(1 - \alpha))^{-\hat{\xi}} - 1 \right] & , \hat{\xi} \neq 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

onde $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ e $\hat{\xi}$ são os valores estimados via MMV da média, desvio-padrão e índice de cauda, respectivamente.

- VaR Histórico:

Finalmente, o cálculo do VaR histórico é feito com base na distribuição empírica dos dados históricos, ou seja, sem fazer suposições sobre a distribuição dos retornos. Após organizá-los em ordem crescente, o VaR corresponde ao quantil empírico α da série histórica de retornos.

No exemplo da Figura 4, o VaR histórico de 5% ($\alpha = 5\%$) para a série de retornos é $q = -3,3\%$. Isto é, 5% dos retornos estão a esquerda deste valor.

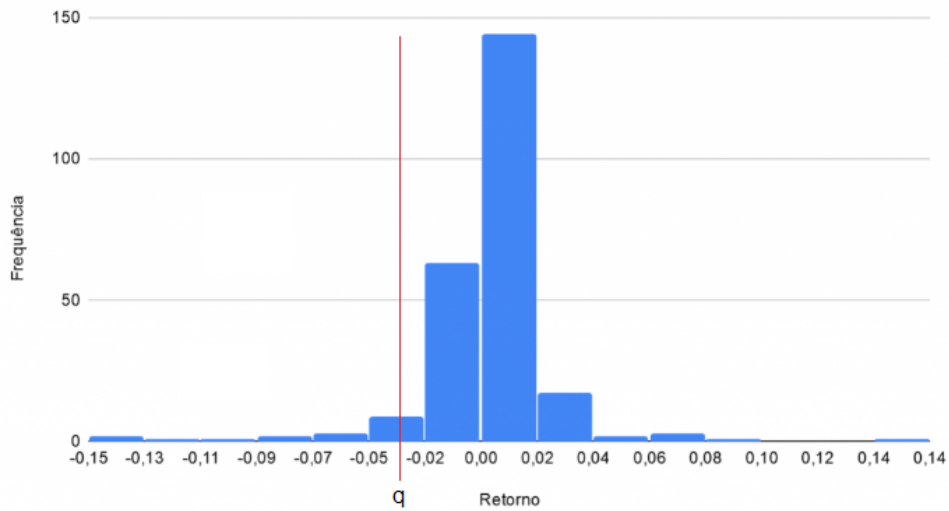


Figura 4: Representação do VaR histórico com $\alpha = 5\%$.

(Fonte: Criação própria).

2.4 Testes Estatísticos

Quando se trata de medir a precisão de um modelo estatístico, deve-se utilizar testes estatísticos que possam testar sua hipótese e verificar a qualidade do ajuste. Além destes testes formais, a análise gráfica também é conveniente e frequentemente necessária.

2.4.1 Teste de Ljung-Box

As hipóteses do teste são:

$$\begin{cases} H_0 : X_1, X_2, \dots, X_n \text{ são i.i.d.} \\ H_1 : X_1, X_2, \dots, X_n \text{ não são i.i.d.} \end{cases}$$

A estatística do teste:

$$Q(r) = n(n+2) \sum_{k=1}^m (n-k)^{-1} r_k^2 \sim \chi_m^2$$

onde r_k é uma estimativa para as autocorrelações do processo X_1, X_2, \dots, X_n :

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n X_t X_{t-k}}{\sum_{t=1}^n X_t^2}$$

e m o número de defasagens da função de autocorrelação. (LJUNG; BOX, 1978)

2.4.2 Teste de Adequação a Distribuição Gumbel

As seguintes hipóteses serão testadas:

$$\begin{cases} H_0 : \text{A distribuição dos extremos é Gumbel} \\ H_1 : \text{A distribuição dos extremos não é Gumbel} \end{cases}$$

Para tal, será utilizada a estatística D de Kolmogorov-Smirnov. (CHANDRA; SINGPURWALLA; STEPHENS, 1981)

$$D^+ = \max_i \left\{ \frac{i}{n} - H_{I, \hat{\mu}, \hat{\sigma}}(m_{(i)}) \right\}$$

$$D^- = \max_i \left\{ H_{I, \hat{\mu}, \hat{\sigma}}(m_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right\}$$

$$D = \max(D^+, D^-)$$

onde $m_{(i)}$ representa os máximos ordenados e $H_{I, \hat{\mu}, \hat{\sigma}}$ a distribuição Gumbel com parâmetros estimados pelo método da máxima verossimilhança (MMV).

A Tabela 1, a seguir, exhibe os valores críticos para diferentes tamanhos de amostra n e níveis de significância.

Tabela 1: Valores críticos para a estatística $\sqrt{n}D$.

n	Nível de Significância			
	10%	5%	2,5%	1%
10	0,760	0,819	0,880	0,944
20	0,779	0,843	0,907	0,973
50	0,790	0,856	0,922	0,988
∞	0,803	0,874	0,939	1,007

(Fonte: Chandra, 1981).

Rejeita-se a hipótese nula (H_0) caso a estatística $\sqrt{n}D$ exceda o valor tabelado.

2.4.3 Teste de Proporção de Falhas

O Teste de Proporção de Falhas (Teste de Kupiec), também conhecido como *backtest*, é um teste estatístico muito utilizado com objetivo de validar os modelos de cálculo do VaR. No trabalho de Goorbergh e Vlaar (1999), o teste foi utilizado com esse objetivo, para diferentes níveis de confiança. Desenvolvido por Kupiec (1995), o método consiste em medir a proporção de exceções ao VaR calculado, isto é, as perdas acima do VaR.

Sendo assim, seja N o número de exceções a um valor limite em uma amostra de tamanho T e p a probabilidade de exceder este limite. Logo, o número de exceções tem distribuição Binomial com parâmetros T e p , ou seja, $N \sim Bin(T, p)$. As seguintes hipóteses são definidas:

$$\begin{cases} H_0 : \frac{N}{T} = p \\ H_1 : \frac{N}{T} \neq p \end{cases} \quad (2.20)$$

A estatística do teste da razão de verossimilhança é dada por:

$$LR = 2 \ln \left(\frac{\left(\frac{N}{T}\right)^N \left(1 - \frac{N}{T}\right)^{T-N}}{p^N (1-p)^{T-N}} \right). \quad (2.21)$$

Sob a hipótese nula, LR tem distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade (χ_1^2).

A Tabela 2 apresenta as regiões de não rejeição do teste, para diferentes tamanhos de amostra de avaliação e probabilidades de cauda.

Tabela 2: Regiões de não rejeição do Teste de Kupiec.

Probabilidade (cauda esquerda)	Tamanho da amostra de avaliação			
	250	500	750	1000
5%	$7 \leq N \leq 19$	$17 \leq N \leq 35$	$27 \leq N \leq 49$	$38 \leq N \leq 64$
1%	$1 \leq N \leq 6$	$2 \leq N \leq 9$	$3 \leq N \leq 13$	$5 \leq N \leq 16$
0,5%	$0 \leq N \leq 4$	$1 \leq N \leq 6$	$1 \leq N \leq 8$	$2 \leq N \leq 9$
0,1%	$0 \leq N \leq 1$	$0 \leq N \leq 2$	$0 \leq N \leq 3$	$0 \leq N \leq 3$
0,01%	$0 \leq N \leq 0$	$0 \leq N \leq 0$	$0 \leq N \leq 1$	$0 \leq N \leq 1$

(Fonte: Kupiec, 1995).

Portanto, a rejeição do teste acontece quando N não pertence ao intervalo tabelado.

3 Análise dos Resultados

3.1 Dados

A modelagem dos dados foi feita com a utilização do software RStudio (RStudio Team, 2020), um editor gratuito do software R (R Core Team, 2020): uma linguagem de programação muito usada por estatísticos, voltada para manipulação, análise e visualização de dados. Os pacotes usados foram: *quantmod* (RYAN; ULRICH, 2020a), *xts* (RYAN; ULRICH, 2020b), *tseries* (TRAPLETTI; HORNIK, 2019), *ismev* (HEFFERNAN; STEPHENSON, 2018) e *PerformanceAnalytics* (PETERSON; CARL, 2020).

A amostra utilizada nesta pesquisa inclui séries de preços de fechamento dos índices Dow Jones, NASDAQ e NYSE que são alguns dos principais índices do mercado de ações americano. Os dados foram extraídos através da plataforma *Yahoo Finance*, com a utilização do pacote *quantmod*, e se referem ao período de 09/01/2015 a 30/12/2019, gerando um total de 1252 observações para cada índice.

Para a realização da modelagem, a amostra foi dividida em duas partes: amostra de avaliação e amostra de estimação. A amostra de estimação, usada para estimar os modelos segundo os dados de retorno, se refere ao período de 09/01/2015 a 31/12/2018, totalizando 1001 observações. Já a amostra de avaliação é utilizada para realizar o teste de proporção de falhas, com o objetivo de testar a eficiência do modelo estimado. Esta possui 251 observações referentes às datas de 02/01/2019 a 30/12/2019.

3.2 Análises

As Figuras 5, 6 e 7 apresentam os preços de fechamento dos índices Dow Jones, NASDAQ e NYSE, respectivamente.



Figura 5: Preços de fechamento - Dow Jones.

(Fonte: Criação própria).



Figura 6: Preços de fechamento - NASDAQ.

(Fonte: Criação própria).



Figura 7: Preços de fechamento - NYSE.

(Fonte: Criação própria).

A Figura 8 representa os preços de fechamento dos índices americanos normalizados por 100, para que as três séries tenham o mesmo ponto de partida e, conseqüentemente, seja feita uma comparação entre elas. Portanto, nota-se um maior crescimento do índice NASDAQ, frente aos outros dois índices. Já na Figura 9 são apresentados os log-retornos dos índices americanos, calculados sob seus respectivos preços de fechamento.

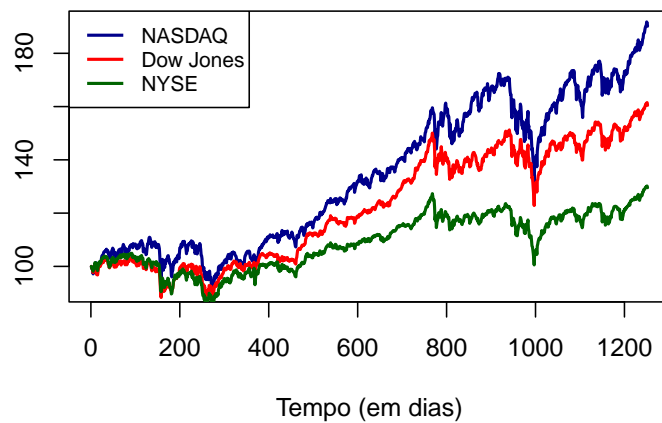


Figura 8: Evolução dos índices americanos.

(Fonte: Criação própria).

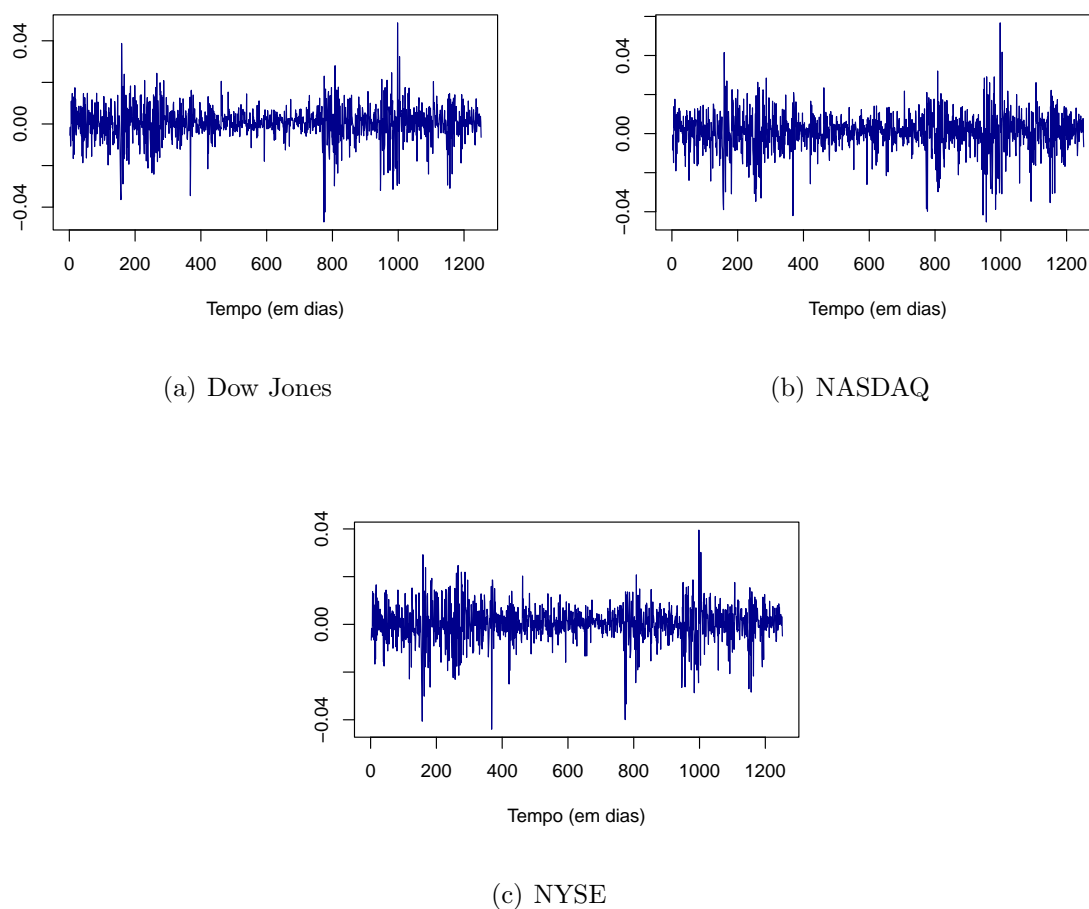


Figura 9: Retornos logarítmicos dos índices americanos

(Fonte: Criação própria).

Em seguida, foi utilizado o Teste de Ljung-Box na amostra de estimação a fim de testar a hipótese de independência nas séries. Essa hipótese é necessária para a realização do teste de Kupiec. Foram utilizados os 8 primeiros *lags*¹, como em Goorbergh e Vlaar (1999). Os p-valores associados ao Teste de Ljung-Box estão apresentados na Tabela 3.

¹Unidades de tempo, no passado, ao qual uma observação pode estar correlacionada.

Tabela 3: P-valor associado ao Teste de Ljung-Box, por índice, para cada *lag*.

<i>lag</i>	Dow Jones	NASDAQ	NYSE
1	0,825	0,796	0,824
2	0,275	0,757	0,541
3	0,346	0,856	0,678
4	0,138	0,585	0,140
5	0,211	0,693	0,208
6	0,257	0,784	0,301
7	0,313	0,856	0,403
8	0,320	0,080	0,310

(Fonte: Criação própria).

Fixado o nível de significância de 5%, não há evidências de autocorrelação nas séries, pelo menos para os primeiros 8 *lags*. Logo, a hipótese de independência não é rejeitada em nenhuma das três amostras de estimação.

Ainda utilizando as amostras de estimação, foram estimados modelos GEV com $\xi = 0$ (Gumbel) para os mínimos das três séries, utilizando a relação descrita em (2.9). Para a estimação dos modelos, foram considerados blocos de tamanho 5, obtendo uma amostra de 201 mínimos. Outros tamanhos de blocos foram testados para a modelagem, porém não apresentaram melhores resultados. O Teste de Adequação a Distribuição Gumbel foi utilizado, conforme aplicação em Chandra, Singpurwalla e Stephens (1981), e o valor crítico da estatística do teste (0,874), neste caso, encontra-se em na Tabela 1.

Os valores da estatística obtidos para Dow Jones, NASDAQ e NYSE foram, respectivamente, 1,387, 1,085 e 1,175. Ao exceder o valor tabelado (0,874), pode-se concluir que a distribuição Gumbel não é adequada para modelar os dados.

Posteriormente, foram estimados modelos GEV com $\xi \neq 0$ para os mínimos, e os estimadores para os parâmetros estão apresentados da Tabela 4.

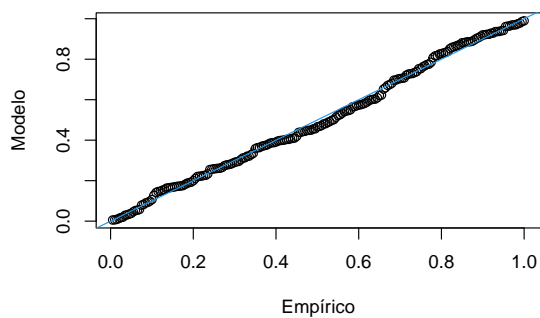
Tabela 4: Parâmetros estimados da GEV.

série	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\xi}$
Dow Jones	0,0043	0,0048	0,2682
NASDAQ	0,0057	0,0060	0,2242
NYSE	0,0047	0,0048	0,2035

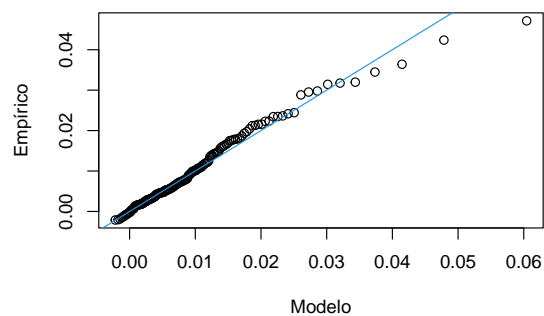
(Fonte: Criação própria).

Como $\hat{\xi} > 0$ para as três séries, a distribuição dos mínimos coincide com a distribuição Fréchet.

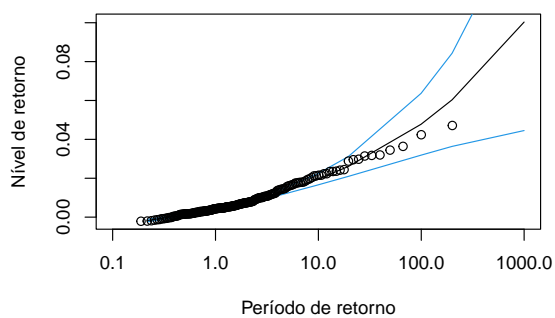
Para avaliar a precisão dos modelos GEV, foram feitas análises gráficas, indicadas por Coles (2001). Os gráficos de diagnóstico são mostrados nas Figuras 10, 11 e 12, respectivamente relacionados às séries Dow Jones, NASDAQ e NYSE. Os gráficos de probabilidade e de quantis mostram que os conjuntos de pontos traçados são praticamente lineares, não apresentando motivos para questionar o modelo. Os gráficos do nível de retorno também resultam em uma boa representação das estimativas empíricas, já que os pontos traçados estão dentro do intervalo de confiança. Por último, os gráficos das estimativas de cada densidade se ajustam bem com o histograma dos dados, portanto, a análise gráfica fornece credibilidade ao modelo GEV estimado.



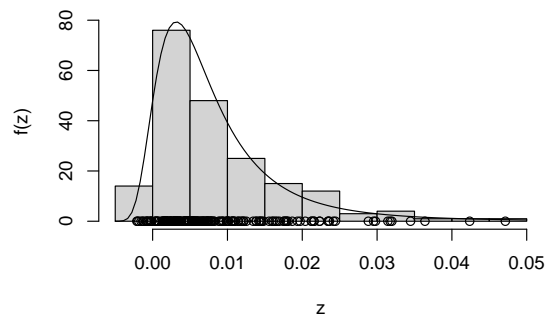
(a) Gráfico de Probabilidade



(b) Gráfico de Quantis



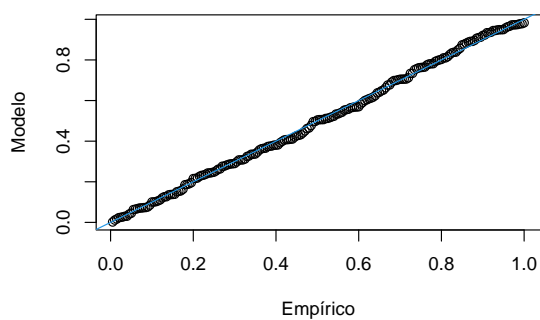
(c) Gráfico do Nível de Retorno



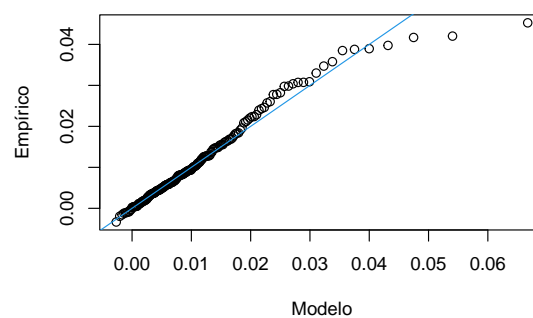
(d) Gráfico de Densidade

Figura 10: Ajuste para a distribuição dos mínimos - Dow Jones.

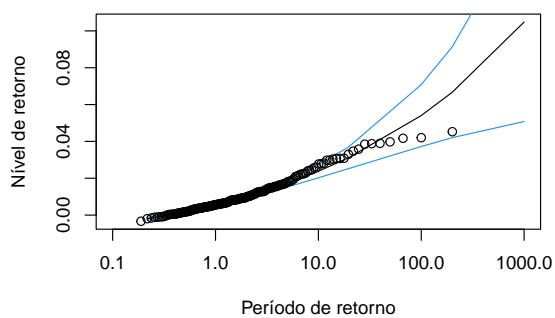
(Fonte: Criação própria).



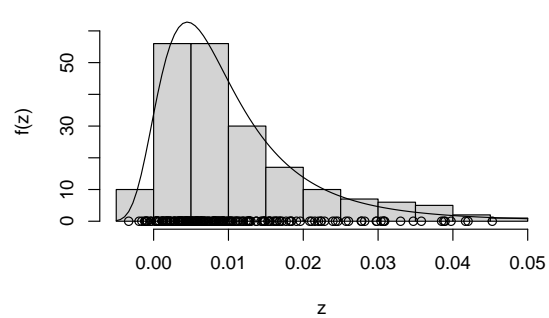
(a) Gráfico de Probabilidade



(b) Gráfico de Quantis



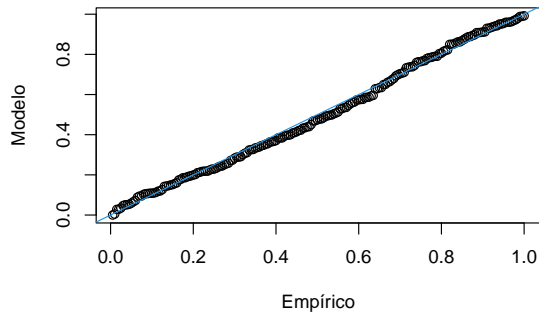
(c) Gráfico do Nível de Retorno



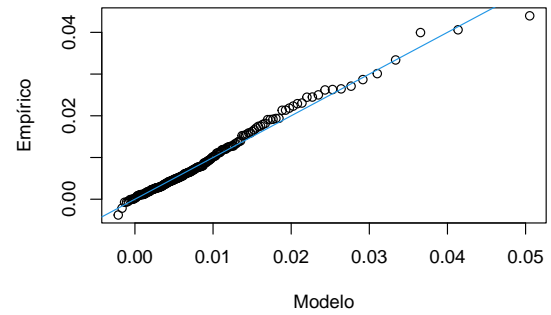
(d) Gráfico de Densidade

Figura 11: Ajuste para a distribuição dos mínimos - NASDAQ.

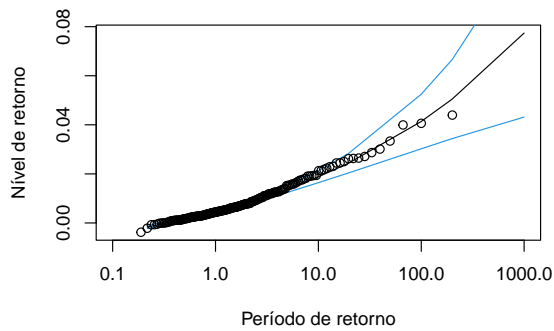
(Fonte: Criação própria).



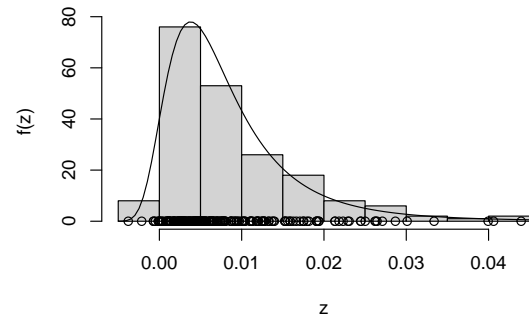
(a) Gráfico de Probabilidade



(b) Gráfico de Quantis



(c) Gráfico do Nível de Retorno



(d) Gráfico de Densidade

Figura 12: Ajuste para a distribuição dos mínimos - NYSE.

(Fonte: Criação própria).

Finalmente, o teste de Kupiec foi realizado para avaliar a capacidade de previsão do modelo ajustado pela GEV, em comparação com os modelos normal e histórico. Fixado $\alpha = 0,05$ e a amostra de avaliação de tamanho 250, os resultados das três metodologias de VaR, para as três séries financeiras, estão apresentadas na Tabela 5. Os valores destacados na cor vermelha indicam a rejeição do teste, ou seja, estão fora do intervalo conforme Tabela 2.

Tabela 5: Resultados do Teste de Kupiec.

série	Probabilidade	LI ¹	LS ²	VaR TVE	VaR Normal	VaR Histórico
				N	N	N
Dow Jones	5%	7	19	13	10	9
	1%	1	6	3	5	3
	0,5%	0	4	0	5	0
	0,1%	0	1	0	3	0
	0,01%	0	0	0	0	0
NASDAQ	5%	7	19	14	9	8
	1%	1	6	2	6	2
	0,5%	0	4	0	5	0
	0,1%	0	1	0	2	0
	0,01%	0	0	0	0	0
NYSE	5%	7	19	12	9	9
	1%	1	6	2	5	2
	0,5%	0	4	0	3	0
	0,1%	0	1	0	2	0
	0,01%	0	0	0	0	0

(Fonte: Criação própria).

Portanto, nota-se que a hipótese nula do Teste de Kupiec foi rejeitada somente para o VaR Normal, nas três séries financeiras. A rejeição ocorreu para probabilidades de cauda a partir de 0,5% para as séries Dow Jones e NASDAQ, e a partir de 0,1% para a série NYSE, dando evidências de que a metodologia Normal não captura bem as violações ao VaR para probabilidades pequenas.

Como não houve rejeição do teste para o VaR pela TVE e para o VaR Histórico em nenhuma das séries, estes podem ser considerados mais eficientes frente à metodologia Normal, neste caso.

¹Limite inferior da região de não rejeição (Tabela 2).

²Limite superior da região de não rejeição (Tabela 2).

4 Conclusões

O objetivo principal deste trabalho foi utilizar a Teoria de Valores Extremos como alternativa para melhorar a modelagem de séries financeiras do mercado de ações americano. Cada uma das séries dos índices Dow Jones, NYSE e NASDAQ foram divididas em uma amostra de estimação e uma amostra de avaliação. O Teste de Ljung-Box, cujo objetivo é avaliar a hipótese de independência, foi utilizado na amostra de estimação. Esta hipótese se confirmou para as três séries, portanto, em seguida foi estimado um modelo GEV para os mínimos, considerando $\xi = 0$ e blocos de tamanho 5. O Teste de Adequação a Distribuição Gumbel evidenciou que esta não é a distribuição apropriada para modelar os dados, mas sim a GEV com $\xi > 0$, que representa a distribuição de Fréchet, comprovada pela análise gráfica.

Com o intuito de verificar a capacidade de previsão do modelo e comparar as três metodologias do *Value-at-Risk*, o Teste de Kupiec foi realizado sobre a amostra de avaliação, concluindo que o modelo GEV foi bem estimado e captura os valores extremos de forma eficiente, assim como o VaR histórico. Como resposta ao principal questionamento desta pesquisa, foi observado que o VaR Normal não possui boa adequação às caudas da distribuição, rejeitando-se a hipótese nula do Teste de Kupiec para probabilidades (cauda esquerda) a partir de 0,5%, nos índices Dow Jones e NASDAQ, e 0,1% no índice NYSE.

Portanto, para tais séries financeiras, a modelagem obtida através da TVE mostrou ser uma boa alternativa frente à modelagem via distribuição normal (comumente utilizada) e pode ser empregada para estudar os eventos de perdas extremas, possibilitando a melhoria da gestão de riscos e, conseqüentemente, minimizando perdas catastróficas.

Como trabalhos futuros, é sugerida a utilização da modelagem através da TVE para análise de risco de diferentes mercados, isto é, utilizando séries financeiras de outros países, por exemplo. Além de expandir tal análise com uso de outras métricas de risco, tal como o CVaR (*Conditional Value-at-Risk*).

Referências

- CASELATO, L. Uma comparação dos modelos de value at risk aplicados em carteiras de renda fixa. *Universidade Católica de São Paulo*, 2009.
- CHANDRA; SINGPURWALLA, N. D.; STEPHENS, M. A. Kolmogorov statistics for tests of fit for the extreme value and weibull distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 1981.
- CHEN, D. E. G. e. a. Q. The extreme-value dependence between the chinese and other international stock markets. *Applied Financial Economics*, 2012.
- CHENG, L. et al. Non-stationary extreme value analysis in a changing climate. Kluwer Academic Publishers, 2014.
- CHUN, L. Y. Comparativo de metodologias de mensuração de var para o mercado financeiro brasileiro. *Universidade Católica de São Paulo*, 2007.
- COLES, S. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. London: Springer, 2001.
- FISHER, R. A.; TIPPETT, L. H. C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1928.
- GAMBA-SANTAMARIA, S.; JAULIN-MENDEZ, O. F. et al. Comparison of methods for estimating the uncertainty of value at risk. Emerald Group Publishing Ltd., 2016.
- GONCU, A.; AKGUL, A. K. et al. An analysis of the extreme returns distribution: the case of the Istanbul Stock Exchange. *Applied Financial Economics*, 2012.
- GOORBERGH, R. van den; VLAAR, P. Value-at-risk analysis of stock returns historical simulation, variance techniques or tail index estimation? 1999.
- HEFFERNAN, J. E.; STEPHENSON, A. G. *ismev: An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. [S.l.], 2018. R package version 1.42. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=ismev>.
- JENKINSON, A. F. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, London, v. 81, p. 158–171, 1955.
- JESÚS, R. de; ORTIZ, E.; CABELLO, A. Long run peso/dollar exchange rates and extreme value behavior: Value at risk modeling. *North American Journal of Economics and Finance*, 2013.

- JORION, P. *Value at risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 3. ed. [S.l.]: McGraw Hill, 2007.
- KUPIEC, P. H. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The Journal of Derivatives*, 1995.
- LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a measure of lack of fit in time series models. Oxford University Press, 1978.
- MALUF, L. A. F. F.; ASANO, J. T. Comparação de modelos para o var no mercado de ações brasileiro sob a hipótese de independência serial de ordens superiores: Modelos garch são mesmo imprescindíveis? *FUCAPE Business School*, 2019.
- MENDES, B. V. M. *Introdução à Análise de Eventos Extremos*. Rio de Janeiro: E-papers Serviços Editoriais, 2004.
- MORGAN, J. P. Riskmetrics. *Technical document*, 1996.
- MWAMBA, J. W. M.; HAMMOUDEH, S. M.; GUPTA, R. Financial tail risks in conventional and islamic stock markets: A comparative analysis. Elsevier B.V., 2017.
- NETO, A. A. *Mercado Financeiro*. 12. ed. [S.l.]: Editora Atlas, 2014.
- NORTEY, E. N. N.; ASARE, K.; METTLE, F. O. Extreme value modelling of ghana stock exchange index. SpringerOpen, 2015.
- OLIVEIRA, D. S.; SANFINS, M. A. S.; SANTOS, D. R. A utilização da teoria de valores extremos na área financeira: um estudo de caso. *Brazilian Journal of Development*, 2020.
- PETERSON, B. G.; CARL, P. *PerformanceAnalytics: Econometric Tools for Performance and Risk Analysis*. [S.l.], 2020. R package version 2.0.4. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=PerformanceAnalytics>.
- PHELAN, M. J. Probability and statistics applied to the practice of financial risk management: The case of j.p. morgan's riskmetrics™. *Journal of Financial Services Research*, 1997.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2020. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.
- ROOTZÉN, H.; KATZ, R. W. Design life level: Quantifying risk in a changing climate. Blackwell Publishing Ltd, 2013.
- RStudio Team. *RStudio: Integrated Development Environment for R*. Boston, MA, 2020. Disponível em: <http://www.rstudio.com/>.
- RYAN, J. A.; ULRICH, J. M. *quantmod: Quantitative Financial Modelling Framework*. [S.l.], 2020. R package version 0.4.17. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=quantmod>.
- RYAN, J. A.; ULRICH, J. M. *xts: eXtensible Time Series*. [S.l.], 2020. R package version 0.12-0. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=xts>.

SILVA, R. R. A utilização das metodologias de VaR, simulação histórica e paramétrica usando a distribuição normal, para explicar as variações do índice IBOVESPA no período de jan/16 a dez/17. *Universidade Federal de Minas Gerais*, 2018.

TOLIKAS, K. Value-at-risk and extreme value distributions for financial returns. *Journal of Risk*, v. 10, p. 31–77, 2008.

TRAPLETTI, A.; HORNIK, K. *tseries: Time Series Analysis and Computational Finance*. [S.l.], 2019. R package version 0.10-47. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=tseries>.

WARD, P. J. et al. Assessing flood risk at the global scale: model setup, results, and sensitivity. Institute of Physics Publishing, 2013.

WILLIAMS, R.; HEERDEN, J. van; CONRADIE, W. Value at Risk and Extreme Value Theory: Application to the Johannesburg Securities Exchange. *Studies in Economics and Econometrics*, Routledge, v. 42, n. 1, p. 87–114, 2018.

APÊNDICE 1 – Análises utilizando o *software R*

Todos os códigos utilizados neste trabalho estão disponíveis no *GitHub*. Caso tenha interesse em consultá-los, clique [aqui](#).