João Pedro de Matos d'Assumpção

Definição rigorosa da distribuição uniforme no intervalo unitário

Niterói - RJ, Brasil

19 de Dezembro de 2022

Universidade Federal Fluminense

João Pedro de Matos d'Assumpção

Definição rigorosa da distribuição uniforme no intervalo unitário

Trabalho de Conclusão de Curso

Monografia apresentada para obtenção do grau de Bacharel em Estatística pela Universidade Federal Fluminense.

Orientador: Prof. Dr. Valentin Sisko

Niterói - RJ, Brasil

19 de Dezembro de 2022

Universidade Federal Fluminense

João Pedro de Matos d'Assumpção

Definição rigorosa da distribuição uniforme no intervalo unitário

Monografia de Projeto Final de Graduação sob o título *"Definição rigorosa da distribuição uniforme no intervalo unitário"*, defendida por João Pedro de Matos d'Assumpção e aprovada em 19 de Dezembro de 2022, na cidade de Niterói, no Estado do Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Valentin Sisko
Departamento de Estatística – UFF

Prof. Dr. Jaime Utria
Departamento de Estatística – UFF

Prof. Dr. Douglas Rodrigues Pinto
Departamento de Estatística – UFF

Niterói, 19 de Dezembro de 2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

D231d D'assumpção, João Pedro de Matos
Definição rigorosa da distribuição uniforme no intervalo unitário / João Pedro de Matos D'assumpção. - 2022.
39 f.

Orientador: Valentin Sisko.
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação)-Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística, Niterói, 2022.

1. Probabilidade. 2. Distribuição uniforme. 3. Teoria da medida. 4. Paradoxo de Banach Tarski. 5. Produção intelectual. I. Sisko, Valentin, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - XXX

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

Resumo

Neste texto, é exposto como é possível definir rigorosamente a distribuição uniforme no intervalo unitário. Para isto, definimos conceitos e demonstramos propriedades de medida. Infelizmente, a σ-álgebra usada na definição não é a σ-álgebra de todos os subconjuntos do intervalo real $[0, 1)$. Um dos exemplos apresentados indica impossibilidade de usar esta σ-álgebra na definição.

Palavras-chave: Probabilidade. Distribuição uniforme. Teoria da medida. Paradoxo de Banach-Tarski.

Sumário

Introdução

Na introdução ao estudo de Probabilidade, somos apresentados a distribuições probabilísticas, que descrevem comportamentos de variáveis aleatórias. Quando essa introdução ocorre, o foco está em questões mais práticas do que teóricas, e muitos conceitos são ou simplificados ou ignorados. Por exemplo, a ideia mais formal e embasada matematicamente de distribuição é omitida. Isso se deve, entre outros motivos, ao requisito teórico envolvido com o tratamento rigoroso de distribuições, que é incompatível com o conhecimento que um aluno de graduação de Estatística possui quando realiza um curso introdutório em Probabilidade. O objetivo deste texto é dar um passo adiante e definir rigorosamente uma distribuição importante: a Distribuição Uniforme no intervalo $[0, 1)$, também chamada de Uniforme Padrão.

Dado um intervalo real $I \subset \mathbb{R}$ do tipo $[a, b], (a, b), [a, b)$ ou $(a, b]$, o seu comprimento será a diferença entre seus extremos, denotado $\ell(I) = b - a$. O comprimento é um exemplo de uma função que associa um número real estendido a cada conjunto em alguma coleção de conjuntos. No caso do comprimento, o domínio é a coleção de todos os intervalos (ROYDEN, 1988). Gostaríamos de estender a noção de comprimento para conjuntos mais complicados que intervalos. Iremos construir uma função m que associa a cada E em uma coleção $\mathfrak{M}$ de conjuntos de números reais um número real estendido não-negativo $m(E)$, chamado de medida de E. É de nosso interesse obter uma função m com algumas propriedades. São elas:

1. a medida está definida para todos os subconjuntos dos reais;

2. para um intervalo real, a sua medida é o seu comprimento;

3. a medida de uma união enumerável de conjuntos mutuamente disjuntos é a soma das medidas desses conjuntos; e

4. a medida é invariante por translação, isto é, se E é um conjunto para qual a medida é definida e $E + y$ é o conjunto $\{x + y : x \in E\}$, então a medida é definida para $E + y$ e a sua medida é igual à medida de E.

Neste trabalho, vamos construir m com as propriedades 2 a 4. Infelizmente, como veremos na Proposição 3.1, m não possuirá a propriedade 1. Na verdade, não existe função desse tipo que satisfaça as quatro propriedades (veja Royden (1988), página 54). As propriedades 2 a 4 serão demonstradas, respectivamente, na Proposição 1.1, na Proposição 2.2, e no Corolário 1.3 e na Proposição 2.4.

As demonstrações aqui presentes possuem mais detalhes do que seria comumente encontrado em um livro sobre o assunto (como Royden (1988)) ou em outros projetos de conclusão. O nível de detalhe deste texto se deve à tentativa de apresentar o tópico a partir de um ponto de vista de descoberta, o que significa também tentar verificar cada passo das demonstrações. Além disso, é importante garantir que o leitor pode acompanhar esse processo apenas pela leitura, sem precisar preencher lacunas usando papel e lápis, como é comum em textos da área.

Como exemplo de detalhamento maior, a Proposição 1.1 possui uma demonstração longa tanto neste texto quanto no livro de Royden. No entanto, o comentário sobre por que a sequência de intervalos usada no passo 1 da demonstração é uma sequência finita não é mencionado por Royden. Isto é, assume-se que o leitor vai verificar esse fato por si só. Mas neste texto, uma parte importante da demonstração é justamente demonstrar que a sequência é finita. Neste texto, o termo "sequência" será usado para se referir tanto ao caso finito quanto ao caso infinito.

O Capítulo 1 tratará dos conceitos iniciais de medida. Nele encontraremos as ideias de medida exterior e suas propriedades. No Capítulo 2, veremos a medida de Lebesgue, mensurabilidade e conjuntos de Borel. Também será definida a distribuição uniforme no intervalo $[0, 1)$. O Capítulo 3 apresentará um exemplo de conjunto não-mensurável, e o Paradoxo de Banach-Tarski será enunciado para fornecer um exemplo de não-mensurabilidade na dimensão 3 (veja Tomkowicz e Wagon (2016), páginas 17 e 30). Os Apêndices tratarão de teoremas, definições e proposições que foram omitidos do texto principal por serem somente tangentes ao tópico principal. Nele se encontrarão algumas noções de Análise Real, bem como algumas propriedades de conjuntos e as definições de álgebra e σ-álgebra. É importante comentar que, durante o texto principal, quando falarmos de álgebras, estaremos nos referindo a álgebras em $\mathbb{R}$, a não ser que seja especificado o contrário. O mesmo valerá para σ-álgebras.

1 Medida Exterior

O objetivo deste capítulo é introduzir noções iniciais de medida, com o foco na definição e nas propriedades da medida exterior de Lebesgue.

Denotamos por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de um conjunto X. Neste texto, estaremos interessados no conjunto $\mathbb{R}$.

Definição 1.1. *Seja X um conjunto qualquer. Uma medida é uma função $m : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$, sendo $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\varnothing \in \mathscr{A}$, com as seguintes propriedades:*

1. *$m(\varnothing) = 0$; e*
2. *se $A \in \mathscr{A}$ e existe uma sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ de conjuntos mutuamente disjuntos pertencentes a $\mathscr{A}$ tais que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, então $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.*

Definição 1.2. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ e considere as coleções enumeráveis $\{I_n\}_{n\geq 1}$ de intervalos abertos tais que essas coleções são coberturas abertas de A (como anunciado na Definição B.3). Para cada coleção, considere a soma dos comprimentos dos seus intervalos. A medida exterior de Lebesgue $m^*(A)$ é o ínfimo dessas somas. Em notação, temos*

$$m^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n\geq 1} \ell(I_n) : A \subset \bigcup_{n\geq 1} I_n \right\}. \tag{1.1}$$

Como o comprimento de um intervalo é sempre positivo, a soma de comprimentos dos intervalos terá o mesmo valor independente da ordem dos termos, então a soma é bem definida.

A definição de medida exterior possui algumas consequências importantes. Uma delas é que

$$m^*(\varnothing) = 0. \tag{1.2}$$

Outra é que se temos dois conjuntos A e B tais que $A \subset B$, então

$$m^*(A) \leq m^*(B). \tag{1.3}$$

A proposição a seguir é fundamental.

Proposição 1.1. *A medida exterior de um intervalo* $I \subset \mathbb{R}$ *é seu comprimento. Isto é, para qualquer intervalo* $I \subset \mathbb{R}$ *da forma* $[a,b], (a,b), [a,b)$ *ou* $(a,b]$*, temos*

$$m^*(I) = b - a. \tag{1.4}$$

Demonstração. A prova será separada em passos.

Passo 1. Considere o intervalo real fechado $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que $[a,b] \subset (a - \varepsilon, b+\varepsilon)$, e $\ell(a-\varepsilon, b+\varepsilon) = b - a + 2\varepsilon$. Como isso é verdade para todo $\varepsilon > 0$, segue que o ínfimo dos comprimentos de intervalos desse tipo é $b - a$, e portanto

$$m^*\big([a,b]\big) \leq b - a. \tag{1.5}$$

Logo, basta garantir que, se $\{I_n\}_{n\geq 1}$ é uma coleção enumerável de intervalos abertos que é cobertura aberta de $[a,b]$, então

$$\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) \geq b - a. \tag{1.6}$$

Pelo Teorema B.1 (veja apêndice), toda coleção de intervalos abertos que é cobertura aberta de $[a,b]$ possui uma subcoleção finita que ainda é cobertura aberta do intervalo, e como a soma de comprimentos dos intervalos de uma subcoleção finita não é maior que a soma de comprimentos dos intervalos da coleção original, basta provar a Desigualdade (1.6) para coleções $\{I_n\}_{n\in A}$, com $A \subset \mathbb{N}$ finito, que são coberturas abertas de $[a,b]$. Como $a \in \bigcup_{n\in A} I_n$, segue que a pertence a algum intervalo da coleção. Chamemos esse intervalo de (a_1, b_1). Então,

$$a_1 < a < b_1. \tag{1.7}$$

Se $b_1 \leq b$, temos que $b_1 \in [a,b]$, e como $b_1 \notin (a_1, b_1)$, existe um intervalo (a_2, b_2) da coleção $\{I_n\}_{n\in A}$ tal que $b_1 \in (a_2, b_2)$, então

$$a_2 < b_1 < b_2.$$

Continuando esse processo, teremos uma sequência $\big((a_i, b_i)\big)_{i\in B}$ de intervalos da coleção $\{I_n\}_{n\in A}$ tais que

$$a_i < b_{i-1} < b_i, \quad i \in B, \tag{1.8}$$

onde $B = \mathbb{N}$ ou $B = \{1, 2, \ldots, k\}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Temos que

$$a < b_1 < b_2 < \cdots < b_{i-1} < b_i < \cdots \leq b.$$

Sejam $i, j \in B$, e suponha sem perda de generalidade que $i > j$. Então, $b_i > b_j$. Logo, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $b_j < x < b_i$ e $x > a_i$. Então, $x \in (a_i, b_i)$ mas $x \notin (a_j, b_j)$. Segue que $(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$, com $i \neq j$. Portanto, os intervalos da sequência são distintos.

Além disso, como os intervalos são distintos e $\{I_n\}_{n \in A}$ é uma coleção finita de intervalos, então a sequência de intervalos $\big((a_i, b_i)\big)_{i \in B}$ é também finita. Ou seja, temos $B = \{1, 2, \ldots, k\}$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Mas isso implica que $b \in (a_k, b_k)$, isto é,

$$a_k < b < b_k. \tag{1.9}$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in A} \ell(I_n) \geq \sum_{i=1}^{k} \ell\big((a_i, b_i)\big) &= (b_k - a_k) + (b_{k-1} - a_{k-1}) + \ldots + (b_1 - a_1) \\ &= b_k - (a_k - b_{k-1}) - (a_{k-1} - b_{k-2}) - \ldots - (a_2 - b_1) - a_1 > b_k - a_1, \end{aligned}$$

uma vez que de (1.8) temos $a_i < b_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Mas de (1.9) temos que $b_k > b$, e de (1.7) segue que $a_1 < a$ e portanto $b_k - a_1 > b - a$. Logo, $\sum_{n \in A} \ell(I_n) > b - a$. Concluímos que

$$m^*\big([a, b]\big) = b - a. \tag{1.10}$$

Passo 2. Considere um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ da forma $(a, b), (a, b]$ ou $[a, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um intervalo fechado $J \subset I$ tal que $\ell(I) - \varepsilon < \ell(J)$. Segue que

$$\ell(I) - \varepsilon < \ell(J) \overset{(1.10)}{=} m^*(J) \overset{(1.3)}{\leq} m^*(I) \overset{(1.3)}{\leq} m^*(\bar{I}) \overset{(1.10)}{=} \ell(\bar{I}) = \ell(I),$$

onde $\bar{I}$ denota o intervalo $[a, b]$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, temos $\ell(I) - \varepsilon < m^*(I) \leq \ell(I)$, e logo segue que $m^*(I) = \ell(I)$.

Passo 3. Considere um intervalo real infinito I qualquer. Temos que, para todo $c > 0$, existe intervalo fechado $J \subset I$ tal que $\ell(J) = c$. Logo,

$$m^*(I) \overset{(1.3)}{\geq} m^*(J) \overset{(1.10)}{=} \ell(J) = c.$$

Como $m^*(I) \geq c$ para todo $c > 0$, segue que $m^*(I) = +\infty = \ell(I)$.

□

Corolário 1.1. *Seja* $A = \{a\}$*, com* $a \in \mathbb{R}$*. Então,* $m^*(A) = 0$*.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, temos que $A \subset (a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2)$. Logo,

$$m^*(A) \overset{(1.3)}{\leq} m^*\big((a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2)\big) \overset{(1.4)}{=} 2(\varepsilon/2) = \varepsilon.$$

Como isso é verdade para todo $\varepsilon > 0$, segue que

$$m^*(A) = 0. \tag{1.11}$$

□

A seguinte proposição apresenta mais um resultado da definição de medida exterior.

Proposição 1.2. *Seja* $\{A_n\}_{n\geq 1}$ *uma coleção enumerável de conjuntos reais. Então,*

$$m^*\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} m^*(A_n). \tag{1.12}$$

Dizemos, nesse caso, que m^* *é enumeravelmente subaditiva.*

Demonstração. Se um dos elementos A_n da coleção possuir medida exterior infinita, a desigualdade é trivial. Portanto suponha que $m^*(A_n) < \infty$ para todo elemento da coleção. Então, dado $\varepsilon > 0$, para qualquer A_n da coleção, existe uma coleção enumerável de intervalos abertos $\{I_{i,n}\}_{i\geq 1}$ tal que $A_n \subset \bigcup_{i\geq 1} I_{i,n}$ e

$$\sum_{i\geq 1} \ell(I_{i,n}) < m^*(A_n) + \varepsilon/2^n. \tag{1.13}$$

Então a coleção $\{I_{i,n}\}_{i\geq 1, n\geq 1} = \bigcup_{n\geq 1}\big(\{I_{i,n}\}_{i\geq 1}\big)$ é enumerável, pois é a união enumerável de coleções enumeráveis, e é cobertura aberta de $\bigcup_{n\geq 1} A_n$. Logo,

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) &\leq \sum_{i\geq 1, n\geq 1} \ell(I_{i,n}) \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{i\geq 1} \ell(I_{i,n}) \\ &\overset{(1.13)}{<} \sum_{n\geq 1}\big(m^*(A_n) + \varepsilon/2^n\big) \\ &\leq \sum_{n\geq 1} m^*(A_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como a desigualdade vale para todo $\varepsilon > 0$, segue (1.12). □

Da proposição anterior seguem quatro corolários.

Corolário 1.2. *Se* $A \subset \mathbb{R}$ *é enumerável, então* $m^*(A) = 0$.

Demonstração. Seja a sequência $(x_n)_{n\in B}$ uma enumeração de A, com $B \subset \mathbb{N}$, onde x_i é o i-ésimo elemento, e seja $\{A_n\}_{n\geq 1}$ uma coleção enumerável com $A_i = \{x_i\}$. Temos então que $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Como cada A_n só possui um elemento, segue de (1.11) que sua medida é zero, e portanto

$$m^*(A) = m^*\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \overset{(1.12)}{\leq} \sum_{n\geq 1} m^*(A_n) = 0. \qquad \square$$

Corolário 1.3. *A medida exterior é invariante por translação. Isto é, para todo* $y \in \mathbb{R}$ *e todo* $E \subset \mathbb{R}$*, temos que*

$$m^*(E) = m^*(E + y). \tag{1.14}$$

Demonstração. Seja E um subconjunto dos reais e $y \in \mathbb{R}$. Se $\{I_n\}_{n\geq 1}$ é uma coleção enumerável de intervalos abertos tais que $E \subset \bigcup_{n\geq 1} I_n$, então

$$E + y \subset \bigcup_{n\geq 1} (I_n + y),$$

e logo

$$m^*(E + y) \leq \sum_{n\geq 1} \ell(I_n + y) = \sum_{n\geq 1} \ell(I_n).$$

Segue que

$$m^*(E + y) \leq m^*(E). \tag{1.15}$$

Mas como a desigualdade acima vale para quaisquer $E \subset \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, em particular podemos considerar o conjunto $E + y$ e, ao invés de y, considerar $-y$. Segue que

$$m^*(E + y) \overset{(1.15)}{\geq} m^*\big((E + y) + (-y)\big) = m^*(E).$$

Logo, $m^*(E + y) = m^*(E)$. $\square$

Corolário 1.4. *O conjunto* $[0, 1)$ *é não-enumerável.*

Demonstração. Já que $m^*\big([0, 1)\big) = 1$, pela Proposição 1.1, então $[0, 1)$ não pode ser enumerável, como consequência do Corolário 1.2. $\square$

Corolário 1.5. *Sejam* A *e* B *subconjuntos de* $\mathbb{R}$*. Então,*

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B). \tag{1.16}$$

Demonstração. O corolário é simplesmente um caso particular da Proposição 1.2 quando $n = 2$. $\square$

2 Mensurabilidade

A definição de medida exterior e suas propriedades demonstradas no Capítulo 1 são importantes para a definição de mensurabilidade. Este capítulo irá desenvolver essa noção, e terminará com a definição da Distribuição Uniforme no intervalo unitário.

Definição 2.1. *Um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ é dito mensurável quando para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ temos que*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c). \tag{2.1}$$

É fácil notar que se um conjunto é mensurável, seu complemento também é mensurável, já que

$$m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap (E^c)^c) = m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap E). \tag{2.2}$$

Repare ainda que $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$. Então, para quaisquer subconjuntos A e E de $\mathbb{R}$, segue que

$$m^*(A) = m^*\big([A \cap E] \cup [A \cap E^c]\big) \overset{(1.16)}{\leq} m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c). \tag{2.3}$$

Este fato motiva a seguinte proposição.

Proposição 2.1. *Seja $E \subset \mathbb{R}$. Então, E é mensurável se, e somente se, para todo $A \subset \mathbb{R}$,*

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c). \tag{2.4}$$

Demonstração. Primeiramente, seja E mensurável. Então, por definição, para todo $A \subset \mathbb{R}$, temos que

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

de onde (2.4) segue.

Agora, suponha que (2.4) é verdadeira para todo $A \subset \mathbb{R}$. Como (2.3) é verdade para todo $E \subset \mathbb{R}$, segue (2.1), e então E é mensurável. □

Após definir o que é um conjunto mensurável, podemos pensar em uma família de conjuntos mensuráveis do intervalo $\mathbb{R}$. Denotaremos por $\mathfrak{M}$ a família de conjuntos reais mensuráveis. Nosso interesse agora se volta para entender a estrutura dessa família. Primeiro provaremos que $\mathfrak{M}$ é uma álgebra (como enunciado na Definição A.1), e para isso precisaremos dos seguintes resultados.

Lema 2.1. *Se $m^*(E) = 0$, então E é mensurável.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Então, $A \cap E \subset E$ e

$$m^*(A \cap E) \overset{(1.3)}{\leq} m^*(E) = 0. \tag{2.5}$$

Além disso, $A \supset A \cap E^c$, e logo

$$m^*(A) \overset{(1.3)}{\geq} m^*(A \cap E^c) \overset{(2.5)}{=} m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap E).$$

Então da Proposição 2.1 segue que o conjunto E é mensurável. □

Lema 2.2. *Se E_1 e E_2 são mensuráveis, então $E_1 \cup E_2$ é mensurável.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Como E_2 é mensurável, então

$$m^*(A \cap E_1^c) \overset{(2.1)}{=} m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c), \tag{2.6}$$

e como $A \cap (E_1 \cup E_2) = [A \cap E_1] \cup [A \cap E_2 \cap E_1^c]$, como demonstrado na Proposição C.1,

$$m^*\big(A \cap [E_1 \cup E_2]\big) \overset{(1.16)}{\leq} m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap E_1^c).$$

Então,

$$\begin{aligned} &m^*\big(A \cap [E_1 \cup E_2]\big) + m^*\big(A \cap [E_1^c \cap E_2^c]\big) \\ &\quad \leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap E_1^c) + m^*\big(A \cap [E_2^c \cap E_1^c]\big) \\ &\quad \overset{(2.6)}{=} m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) \\ &\quad \overset{(2.1)}{=} m^*(A), \end{aligned}$$

pois E_1 é mensurável. Da desigualdade acima, lembrando que $E_1^c \cup E_2^c = (E_1 \cap E_2)^c$, e da Proposição 2.1, segue que $E_1 \cup E_2$ é mensurável. □

Agora podemos provar o teorema a seguir.

Teorema 2.1. *A família $\mathfrak{M}$ é uma álgebra.*

Demonstração. Primeiramente, note que pelo Lema 2.1, o conjunto vazio pertence a $\mathfrak{M}$, pois $m^*(\varnothing) \overset{(1.2)}{=} 0$. E pelo Lema 2.2, sabemos que a família de conjuntos mensuráveis é fechada em união finita, isto é, que se $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathfrak{M}$, então

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{M}.$$

Portanto, resta mostrar que $\mathfrak{M}$ é fechado em complemento, isto é, que se $E \in \mathfrak{M}$, então $E^c \in \mathfrak{M}$, o que é verdade, como foi observado em (2.2). Segue que $\mathfrak{M}$ é uma álgebra. □

Tendo provado que a família de conjuntos mensuráveis é uma álgebra, basta demonstrarmos que uma união enumerável de conjuntos mensuráveis é também mensurável (ou seja, que $\mathfrak{M}$ é fechado em união enumerável) para podermos afirmar que $\mathfrak{M}$ é uma σ-álgebra (como enunciado na Definição A.2). Para isso, precisaremos do lema a seguir.

Lema 2.3. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ e seja $(E_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de conjuntos mutuamente disjuntos e mensuráveis. Então,*

$$m^*(A \cap [\bigcup_{i=1}^{n} E_i]) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

Demonstração. O lema será demonstrado por indução. A afirmativa é claramente verdadeira para $n = 1$, uma vez que

$$m^*(A \cap [\bigcup_{i=1}^{1} E_i]) = m^*(A \cap E_1) = \sum_{i=1}^{1} m^*(A \cap E_i).$$

Agora, suponha que a afirmação é verdadeira quando tivermos $n - 1$ conjuntos mutuamente disjuntos e mensuráveis, ou seja,

$$m^*(A \cap [\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i]) = \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i). \tag{2.7}$$

Como os E_i são mutuamente disjuntos, a Proposição C.2 é válida, o que implica que (C.2) e (C.3) são válidos.

Intersectando ambos os lados da Equação (C.2) com A, obtemos

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \cap E_n = A \cap E_n. \tag{2.8}$$

Além disso, intersectando ambos os lados de (C.3) com A, temos

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \cap E_n^c = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i). \tag{2.9}$$

Como E_n é mensurável, temos que

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) &= m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \cap E_n) + m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \cap E_n^c) \\ &\overset{(2.8),(2.9)}{=} m^*(A \cap E_n) + m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)) \\ &\overset{(2.7)}{=} m^*(A \cap E_n) + \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2. *A família $\mathfrak{M}$ de conjuntos mensuráveis é uma σ-álgebra.*

Demonstração. Já provamos que $\mathfrak{M}$ é uma álgebra de conjuntos, portanto só precisamos mostrar que se um conjunto E é uma união infinita e enumerável de conjuntos mensuráveis, ele também é mensurável. Mas como $\mathfrak{M}$ é uma álgebra, sabemos pela Proposição C.3 que existe uma sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos mutuamente disjuntos e mensuráveis tal que

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i. \tag{2.10}$$

Seja $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Logo, como $\mathfrak{M}$ é uma álgebra, F_n é mensurável. Além disso, como $F_n \subset E$, temos $F_n^c \supset E^c$ e logo $A \cap F_n^c \supset A \cap E^c$. Segue que, dado um conjunto A qualquer,

$$m^*(A) \overset{(2.1)}{=} m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) \overset{(1.3)}{\geq} m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap E^c).$$

Mas pelo Lema 2.3, sabemos que

$$m^*(A \cap F_n) = m^*(A \cap [\bigcup_{i=1}^{n} E_i]) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

Temos então que

$$m^*(A) \overset{(2.1)}{=} m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c). \tag{2.11}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m^*(A\cap E_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A\cap E_i) \\
&\overset{(1.12)}{\geq} m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap E_i)\right) \\
&= m^*\left(A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right) \\
&\overset{(2.10)}{=} m^*(A\cup E)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Como a Desigualdade (2.11) só depende de n no lado direito, podemos aplicar o limite quando n tende a infinito, e, por (2.12), obtemos

$$m^*(A) \geq m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E^c).$$

Então, de (2.4), segue que o conjunto E é mensurável. □

Sabendo que a família de conjuntos mensuráveis é uma σ-álgebra, voltamos nossa atenção para os conjuntos de Borel. Primeiramente, iremos defini-los de duas formas.

Definição 2.2. *A coleção $\mathscr{B}$ de conjuntos de Borel é a menor σ-álgebra que contém todos os intervalos reais.*

Da definição acima, qualquer conjunto obtido através de operações de união enumerável, interseção enumerável e complemento de intervalos é um conjunto de Borel.

Definição 2.3. *A coleção $\mathscr{B}$ de conjuntos de Borel é a menor σ-álgebra que contém todos os intervalos do tipo (a,∞), com $a\in\mathbb{R}$.*

A Proposição A.2, demonstrada no apêndice, nos permite afirmar que as definições acima são equivalentes.

Uma característica importante desse tipo de conjunto é a de mensurabilidade, isto é, todo conjunto de Borel é mensurável. Para provar isso, utilizaremos o lema a seguir.

Lema 2.4. *Seja $a\in\mathbb{R}$. Logo, o intervalo (a,∞) é mensurável.*

Demonstração. Para $A\subset\mathbb{R}$, sejam $A_1 = A\cap(a,\infty)$ e $A_2 = A\cap(a,\infty)^c = A\cap(-\infty,a]$. Vamos mostrar que $m^*(A)\geq m^*(A_1)+m^*(A_2)$. Dado $\varepsilon>0$, pela Definição 1.2 existe uma coleção enumerável $\{I_n\}_{n\geq1}$ de intervalos abertos tais que

$$A\subset\bigcup_{n\geq1} I_n \tag{2.13}$$

e

$$m^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{n\geq 1} \ell(I_n). \tag{2.14}$$

Seja $I_n^{'} = I_n \cap (a, \infty)$ e $I_n^{''} = I_n \cap (-\infty, a]$. Então, $I_n^{'}$ e $I_n^{''}$ são intervalos e

$$\ell(I_n) = \ell(I_n^{'}) + \ell(I_n^{''}) = m^*(I_n^{'}) + m^*(I_n^{''}). \tag{2.15}$$

Intersectando cada lado de (2.13) com (a, ∞), temos $A_1 \subset \bigcup_{n\geq 1} I_n^{'}$, e então

$$m^*(A_1) \overset{(1.3)}{\leq} m^*(\bigcup_{n\geq 1} I_n^{'}) \overset{(1.12)}{\leq} \sum_{n\geq 1} m^*(I_n^{'}).$$

E intersectando cada lado de (2.13) com $(-\infty, a]$, temos $A_2 \subset \bigcup_{n\geq 1} I_n^{''}$, e então

$$m^*(A_2) \overset{(1.3)}{\leq} m^*(\bigcup_{n\geq 1} I_n^{''}) \overset{(1.12)}{\leq} \sum_{n\geq 1} m^*(I_n^{''}).$$

Somando os dois, temos

$$\begin{aligned} m^*(A_1) + m^*(A_2) &\leq \sum_{n\geq 1} m^*(I_n^{'}) + \sum_{n\geq 1} m^*(I_n^{''}) \\ &= \sum_{n\geq 1} (m^*(I_n^{'}) + m^*(I_n^{''})) \\ &\overset{(2.15)}{=} \sum_{n\geq 1} \ell(I_n) \\ &\overset{(2.14)}{\leq} m^*(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Já a desigualdade vale para todo $\varepsilon > 0$, temos que

$$m^*(A) \geq m^*(A_1) + m^*(A_2).$$

Então, pela Inequação (2.4), o conjunto (a, ∞) é mensurável. □

Teorema 2.3. *Todo conjunto de Borel é mensurável.*

Demonstração. Como, pelo Lema 2.4, $\mathfrak{M}$ é uma σ-álgebra contendo intervalos da forma (a, ∞), e, pela Definição 2.3, a família de todos os conjuntos de Borel $\mathscr{B}$ é a menor σ-álgebra contendo intervalos dessa forma, segue que $\mathscr{B} \subset \mathfrak{M}$. □

Podemos agora definir a medida de Lebesgue.

Definição 2.4. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $A \in \mathfrak{M}$. A medida de Lebesgue de A, denotado $m(A)$, é a medida exterior de A.*

A medida de Lebesgue é, portanto, a medida exterior restrita à família de conjuntos mensuráveis. Com essa restrição, podemos garantir duas propriedades que serão provadas a seguir.

Proposição 2.2. *Seja* $(E_i)_{i\geq 1}$ *uma sequência de conjuntos mensuráveis. Então,*

$$m\Big(\bigcup_{i\geq 1} E_i\Big) \leq \sum_{i\geq 1} m(E_i). \tag{2.16}$$

Se os conjuntos são mutuamente disjuntos, então

$$m\Big(\bigcup_{i\geq 1} E_i\Big) = \sum_{i\geq 1} m(E_i). \tag{2.17}$$

Demonstração. Note que, pelo Teorema 2.2, já que os E_i são mensuráveis, então $\bigcup_{i\geq 1} E_i$ também é mensurável. Segue que

$$m\Big(\bigcup_{i\geq 1} E_i\Big) = m^*\Big(\bigcup_{i\geq 1} E_i\Big) \overset{(1.12)}{\leq} \sum_{i\geq 1} m^*(E_i) = \sum_{i\geq 1} m(E_i).$$

Se $(E_i)_{i\geq 1}$ é uma sequência finita de conjuntos mensuráveis e mutuamente disjuntos, então pelo Lema 2.3 temos que, considerando $A = \mathbb{R}$,

$$m\Big(\bigcup_{i\geq 1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i). \tag{2.18}$$

Agora considere uma sequência infinita $(E_i)_{i\geq 1}$ de conjuntos mensuráveis e mutuamente disjuntos. Então, para qualquer n, temos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Logo, temos que

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \overset{(1.3)}{\geq} m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) \overset{(2.18)}{=} \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

Mas como o lado esquerdo da desigualdade não depende de n, segue que

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

E pela Desigualdade (2.16), concluímos que $m\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$. □

Da Definição 1.1, da Equação (1.2), do Lema 2.1, e da Proposição 2.2, segue que a medida de Lebesgue é de fato uma medida.

A proposição a seguir não é necessária para o objetivo deste texto. No entanto, foi incluída por ser uma propriedade importante de uma medida e ter uma demonstração que é interessante e similar a outras demonstrações deste capítulo.

Proposição 2.3. *Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de conjuntos mensuráveis, isto é, uma sequência tal que $E_{n+1} \subset E_n$ para todo n, e suponha que $m^*(E_1)$ é finita. Então,*

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Demonstração. Seja $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, e seja $F_n = E_n \setminus E_{n+1}$. Então, E é mensurável e, pela Proposição C.4,

$$E_1 \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n. \tag{2.19}$$

Logo, os conjuntos F_n são mutuamente disjuntos e mensuráveis. Então,

$$m(E_1 \setminus E) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n \setminus E_{n+1}).$$

Mas como $E_1 \supset E$, segue que $E_1 = E \cup (E_1 \setminus E)$ é uma união de conjuntos mutuamente disjuntos e mensuráveis e

$$m(E_1) = m(E) + m(E_1 \setminus E). \tag{2.20}$$

Similarmente, $E_{n+1} \subset E_n$, então temos $E_n = E_{n+1} \cup (E_n \setminus E_{n+1})$, e portanto

$$m(E_n) = m(E_{n+1}) + m(E_n \setminus E_{n+1}). \tag{2.21}$$

E como $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente, temos que $m(E_n) \leq m(E_1) < \infty$ para todo n e logo

$$m(E_1 \setminus E) \overset{(2.20)}{=} m(E_1) - m(E) \tag{2.22}$$

e

$$m(E_n \setminus E_{n+1}) \overset{(2.21)}{=} m(E_n) - m(E_{n+1}). \tag{2.23}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
m(E_1) - m(E) &\overset{(2.22)}{=} m(E_1 \setminus E)\\
&\overset{(2.17),(2.19)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n \setminus E_{n+1})\\
&\overset{(2.23)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \big(m(E_n) - m(E_{n+1})\big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \big(m(E_i) - m(E_{i+1})\big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \big(m(E_1) - m(E_n)\big) = m(E_1) - \lim_{n\to\infty} m(E_n).
\end{aligned}$$

Segue que $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$. □

Por fim, iremos demonstrar que mensurabilidade é invariante por translação. Essa proposição será utilizada no Capítulo 3.

Proposição 2.4. *Seja $E \in \mathfrak{M}$ e seja $y \in \mathbb{R}$. Então, $E + y \in \mathfrak{M}$.*

Demonstração. Seja A um conjunto qualquer. Então,

$$\begin{aligned}
m^*(A) &\overset{(1.14)}{=} m^*(A - y)\\
&= m^*\big((A-y)\cap E\big) + m^*\big((A-y)\cap E^c\big)\\
&\overset{(1.14)}{=} m^*\Big(\big((A-y)\cap E\big) + y\Big) + m^*\Big(\big((A-y)\cap E^c\big) + y\Big)\\
&= m^*\big(A \cap (E+y)\big) + m^*\big(A \cap (E^c + y)\big)\\
&= m^*\big(A \cap (E+y)\big) + m^*\big(A \cap (E+y)^c\big).
\end{aligned}$$

Segue que $E + y$ é mensurável. □

Agora, iremos considerar a família de conjuntos $\mathscr{F}$, definida por

$$\mathscr{F} = \{A : A \in \mathscr{B} \text{ e } A \subset [0,1)\}.$$

Demonstraremos que $\mathscr{F}$ é uma σ-álgebra em $[0,1)$.

Proposição 2.5. *A família de conjuntos $\mathscr{F}$ é uma σ-álgebra em $[0,1)$.*

Demonstração. Primeiro, $\varnothing \in \mathscr{F}$, uma vez que $\varnothing \in \mathscr{B}$ e $\varnothing \subset [0,1)$. Em seguida, considere uma sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ de conjuntos de $\mathscr{F}$. Como cada A_n pertence à σ-álgebra

$\mathscr{B}$, segue que

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{B}.$$

Além disso, como cada A_n é também subconjunto do intervalo $[0,1)$, segue que

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \subset [0,1).$$

Temos então que a união também pertence a $\mathscr{F}$. Logo, $\mathscr{F}$ é fechado em união enumerável.

Resta demonstrar que $\mathscr{F}$ é fechado em complemento. Seja $A \in \mathscr{F}$. Como estamos interessados em $\mathscr{F}$ ser uma σ-álgebra apenas no intervalo $[0,1)$, queremos saber se

$$[0,1) \setminus A \in \mathscr{F}. \tag{2.24}$$

Note que, como $\mathscr{B}$ é uma σ-álgebra em $\mathbb{R}$, e $A \in \mathscr{B}$, então $\mathbb{R} \setminus A \in \mathscr{B}$. E como uma σ-álgebra é fechada em interseção enumerável, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap [0,1) \in \mathscr{B}$. Mas essa interseção também pertence a $[0,1)$. Segue que

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap [0,1) \in \mathscr{F}. \tag{2.25}$$

Mas note que

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap [0,1) = \big(\mathbb{R} \cap [0,1)\big) \setminus \big(A \cap [0,1)\big) = [0,1) \setminus A. \tag{2.26}$$

De (2.25) e (2.26), segue (2.24). Logo, $\mathscr{F}$ é fechado em complemento, e $\mathscr{F}$ é uma σ-álgebra em $[0,1)$. $\square$

A σ-álgebra $\mathscr{F}$ e a medida m são usadas para a definição da distribuição uniforme no intervalo unitário.

Definição 2.5. *Definimos a distribuição uniforme no intervalo $[0,1)$ como a medida u com domínio $\mathscr{F}$ tal que $u(A) = m(A)$ para qualquer $A \in \mathscr{F}$.*

3 Conjuntos não mensuráveis

As definições de mensurabilidade naturalmente sugerem uma pergunta: existem conjuntos que não podem ser mensurados? A existência de conjuntos não-mensuráveis (pela medida de Lebesgue) será demonstrada neste capítulo. Primeiro, iremos definir um tipo especial de soma.

Definição 3.1. *Sejam x e y pertencentes ao intervalo real $[0,1)$. Definimos a soma módulo 1 de x e y, denotada $x \oplus y$, como*

$$x \oplus y = \begin{cases} x+y & \textit{se } x+y<1, \\ x+y-1 & \textit{se } x+y \geq 1. \end{cases}$$

A soma módulo 1 é uma operação comutativa e associativa que leva pares de números em $[0,1)$ a um número em $[0,1)$. Se associarmos a cada $x \in [0,1)$ o ângulo $2\pi x$, então a operação de soma módulo 1 corresponde à soma de ângulos. Podemos ainda pensar na operação de translação.

Definição 3.2. *Se $E \subset [0,1)$ e $y \in [0,1)$, então definimos a translação módulo 1 de E por y como o conjunto*

$$E \oplus y = \{z : z = x \oplus y, \textit{ para algum } x \in E\}.$$

Continuando nossa analogia com ângulos, a translação módulo 1 por um $y \in [0,1)$ corresponde à rotação por um ângulo de $2\pi y$.

Com as operações módulo 1 definidas, podemos demonstrar que a medida de Lebesgue é invariante por translação módulo 1.

Lema 3.1. *Seja $E \subset [0,1)$ um conjunto mensurável. Então, para cada $y \in [0,1)$, o conjunto $E \oplus y$ é mensurável e $m(E \oplus y) = m(E)$.*

Demonstração. Sejam $E_1 = E \cap [0, 1-y)$ e $E_2 = E \cap [1-y, 1)$. Então E_1 e E_2 são conjuntos mensuráveis disjuntos cuja união é E, e então

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2).$$

Pela construção de E_1, temos que $E_1 \oplus y = E_1 + y$, e então $E_1 \oplus y$ é mensurável pela Proposição 2.4. Pelo Corolário 1.3, segue que

$$m(E_1 \oplus y) = m(E_1).$$

Além disso, pela construção de E_2, temos que $E_2 \oplus y = E_2 + (y-1)$, então da Proposição 2.4 segue que $E_2 \oplus y$ é mensurável, e

$$m(E_2 \oplus y) = m(E_2)$$

pelo Corolário 1.3. Mas

$$E \oplus y = (E_1 \oplus y) \cup (E_2 \oplus y),$$

e $(E_1 \oplus y) \cap (E_2 \oplus y) = \varnothing$. Então, $E \oplus y$ é mensurável e

$$\begin{aligned} m(E \oplus y) &= m(E_1 \oplus y) + m(E_2 \oplus y) \\ &= m(E_1) + m(E_2) \\ &= m(E). \end{aligned}$$

□

Podemos agora definir um conjunto não-mensurável.

Proposição 3.1. *Existe um subconjunto não-mensurável do intervalo* $[0, 1)$.

Demonstração. Se $x - y$ é um número racional, dizemos que x e y são equivalentes, denotado $x \sim y$. Isso é uma relação de equivalência que particiona $[0, 1)$ em classes de equivalência, isto é, classes tais que a diferença entre quaisquer dois elementos de uma classe é um número racional, enquanto que a diferença entre quaisquer dois elementos de classes diferentes é um número irracional. Para entender mais sobre classes, veja páginas 23 e 24 de Royden (1988).

Pelo axioma da escolha, existe um conjunto P que contém exatamente um elemento de cada classe de equivalência. Seja $(r_i)_{i \geq 1}$ uma enumeração dos racionais em $[0, 1)$, com $r_1 = 0$, e defina $P_i = P \oplus r_i$. Então $P_1 = P$. Seja $x \in P_i \cap P_j$. Segue que

$$x = p_i \oplus r_i = p_j \oplus r_j,$$

com p_i e p_j pertencentes a P. Mas $p_i - p_j = r_j - r_i$ é racional, então $p_i \sim p_j$. Como P

possui somente um elemento de cada classe de equivalência, segue que $i = j$. Ou seja, se $i \neq j$, então P_i e P_j são disjuntos. Temos então que $(P_i)_{i \geq 1}$ é uma sequência de conjuntos mutuamente disjuntos.

Por outro lado, cada número real $x \in [0, 1)$ está em alguma classe de equivalência e então é equivalente a algum elemento em P. Mas se a diferença de x com algum elemento de P é um número racional r_i, então $x \in P_i$. Segue que

$$\bigcup_{i \geq 1} P_i = [0, 1).$$

Provaremos agora que P é um conjunto não-mensurável. Suponha que P é mensurável. Como cada P_i é uma translação módulo 1 de P, segue pelo Lema 3.1 que cada P_i é mensurável e possui a mesma medida de P. Mas se esse for o caso,

$$m\big([0, 1)\big) = \sum_{i \geq 1} m(P_i) = \sum_{i \geq 1} m(P).$$

Logo, a medida do intervalo $[0, 1)$ é ou infinito, ou zero, dependendo se a medida de P é positiva ou nula. As duas possibilidades são um absurdo, já que $m([0, 1)) = 1$. Segue que P não pode ser mensurável. $\square$

Iremos agora estabelecer algumas definições que nos ajudarão a estudar um caso que mostra os problemas de aplicar a medida de Lebesgue a conjuntos não-mensuráveis.

Definição 3.3. *Dizemos que um grupo G age em um conjunto qualquer A se, para cada $g \in G$, existe uma função bijetora de A em A, também denotada como g, tal que para cada $g, h \in G$ e $a \in A$, temos que*

$$g\big(h(a)\big) = (gh)(a)$$

e

$$e(a) = a,$$

onde $e \in G$ é a identidade de G.

Definição 3.4. *Seja G um grupo que age em um conjunto X e suponha que $E \subseteq X$ é um conjunto não-vazio. Então, E é G-paradoxal, ou paradoxal em relação a G, se, para algum par de inteiros positivos m e n, existem conjuntos mutuamente disjuntos $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ de E e elementos $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_m$ de G tais que*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j).$$

Definição 3.5. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos uma isometria de $\mathbb{R}^n$ como uma bijeção de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ que preserva distância euclidiana.*

O teorema a seguir é um dos motivos para a importância do estudo da medida.

Teorema 3.1 (Paradoxo de Banach-Tarski)**.** *Toda bola em $\mathbb{R}^3$ é paradoxal em relação a G_3, o grupo de isometrias de $\mathbb{R}^3$.*

O Paradoxo de Banach-Tarski possui uma interpretação visual intuitiva, como mencionado por Wapner (2005):

> Uma bola pode ser separada em um número finito de pedaços e rearranjada para criar duas bolas, cada uma idêntica à original em forma e volume.

Tanto o Teorema 3.1 quanto a Proposição 3.1 nos mostram a importância da Definição 2.5.

Referências

ROYDEN, H. L. *Real analysis*. 3rd. ed. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 1988.

TOMKOWICZ, G.; WAGON, S. *The Banach-Tarski paradox*. 2nd. ed. New York, NY: Cambridge: Cambridge University Press, 2016. v. 163. (Encycl. Math. Appl., v. 163).

WAPNER, L. M. *The pea and the sun. A mathematical paradox*. Wellesley, MA: A K Peters, 2005.

APÊNDICE A

Este apêndice será dedicado a conceitos relacionados a álgebras de conjuntos e σ-álgebras. Serão apresentados resultados importantes para a discussão do texto principal.

Definição A.1. *Seja $\mathscr{A}$ uma coleção de subconjuntos de um conjunto X. Dizemos que $\mathscr{A}$ é uma álgebra de conjuntos (ou álgebra Booleana) se:*

- $\varnothing \in \mathscr{A}$;
- $A \in \mathscr{A}$ *implica que* $A^c \in \mathscr{A}$; *e*
- $A, B \in \mathscr{A}$ *implica que* $A \cup B \in \mathscr{A}$.

Podemos verificar, por indução, que como $\mathscr{A}$ é fechado em união de dois conjuntos, também é fechado em união finita. Além disso, como consequência das leis de DeMorgan, temos que

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \right)^c. \tag{A.1}$$

E visto que $\mathscr{A}$ é fechado em união finita e em complemento, segue que é também fechado em interseção finita.

Definição A.2. *Seja $\mathscr{A}$ uma coleção de subconjuntos de um conjunto X. Dizemos que $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra se:*

- $\varnothing \in \mathscr{A}$;
- $A \in \mathscr{A}$ *implica que* $A^c \in \mathscr{A}$; *e*
- *Se* $A_n \in \mathscr{A}$, *para todo* $n \geq 1$, *então* $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$.

Pelo mesmo raciocínio de (A.1), temos que $\mathscr{A}$ é fechado em interseção enumerável.

Proposição A.1. *Seja $\mathscr{C}$ uma coleção de subconjuntos de um conjunto X. Existe uma σ-álgebra $\sigma(\mathscr{C})$ tal que*

- $\sigma(\mathscr{C}) \supset \mathscr{C}$*; e*
- *Se $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra qualquer contendo $\mathscr{C}$, então $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$.*

A σ-álgebra $\sigma(\mathscr{C})$ é chamada de σ-álgebra gerada por $\mathscr{C}$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{F}$ a coleção de todas as σ-álgebras contendo $\mathscr{C}$.

Consideremos

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcap_{\mathscr{A} \in \mathfrak{F}} \mathscr{A}.$$

Como $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$, para qualquer $\mathscr{A} \in \mathfrak{F}$, temos que

$$\mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C}).$$

Além disso, seja $\mathscr{A}$ uma σ-álgebra qualquer contendo $\mathscr{C}$. Logo, $\mathscr{A} \in \mathfrak{F}$. Temos então que $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$.

Provaremos que $\sigma(\mathscr{C})$ é, de fato, uma σ-álgebra.

Primeiro, note que $\varnothing \in \mathscr{A}$ para qualquer $\mathscr{A} \in \mathfrak{F}$, uma vez que cada $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra. Logo, $\varnothing \in \sigma(\mathscr{C})$.

Repare ainda que, se $A \in \sigma(\mathscr{C})$, então $A \in \mathscr{A}$ para qualquer $\mathscr{A} \in \mathfrak{F}$. Mas como todo $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra, e σ-álgebras são fechadas em complemento, temos $A^c \in \mathscr{A}$ e logo $A^c \in \sigma(\mathscr{C})$. Logo, $\sigma(\mathscr{C})$ é fechado em complemento.

Finalmente, considere uma sequência $(A_n)_{n\geq 1} \subset \sigma(\mathscr{C})$. Então, $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{A}$ para todo $\mathscr{A} \in \mathfrak{F}$. Como toda σ-álgebra é fechada em união enumerável, então

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}.$$

Segue então que essa união pertence a $\sigma(\mathscr{C})$, o que implica que $\sigma(\mathscr{C})$ é fechado em união enumerável e, portanto, é uma σ-álgebra. $\square$

Proposição A.2. *Seja $\mathscr{C}$ o conjunto de todos os intervalos reais contidos em $\mathbb{R}$ e seja $\mathscr{D}$ o conjunto de todos os intervalos do tipo (a, ∞), com $a \in \mathbb{R}$. Então, $\sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{D})$.*

Demonstração. Já que $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$, segue que $\sigma(\mathscr{D}) \subset \sigma(\mathscr{C})$.

Como $\sigma(\mathscr{D}) \supset \mathscr{D}$ e qualquer σ-álgebra é fechada em complemento, intervalos do tipo $(-\infty, a]$, com $a \in \mathbb{R}$, pertencem a $\sigma(\mathscr{D})$. Isso implica que $(a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > a$, também pertence a $\sigma(\mathscr{D})$, pois qualquer σ-álgebra é fechada em interseção de dois elementos e

$$(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, \infty).$$

Repare ainda que, para $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, temos

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right].$$

Uma vez que qualquer σ-álgebra é fechada em união enumerável, $(a, b) \in \sigma(\mathscr{D})$.

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, temos

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b\right].$$

Já que qualquer σ-álgebra é fechada em interseção enumerável, então o intervalo $[a, b]$ pertence a $\sigma(\mathscr{D})$.

Finalmente, considere o intervalo $[a, b)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Já que

$$[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a, b - \frac{1}{n}\right]$$

e qualquer σ-álgebra é fechada em união enumerável, $[a, b) \in \sigma(\mathscr{D})$.

Restam os intervalos do tipo , $(-\infty, a)$ e $[a, \infty)$. Note que

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n \geq 1} (a - n, a).$$

Como intervalos do tipo (a, b) pertencem a $\sigma(\mathscr{D})$ e σ-álgebras são fechadas em união enumerável, segue que $(-\infty, a) \in \sigma(\mathscr{D})$. Similarmente,

$$[a, \infty) = \bigcup_{n \geq 1} [a, a + n),$$

e como intervalos do tipo $[a, b)$ pertencem a $\sigma(\mathscr{D})$, segue que $[a, \infty) \in \sigma(\mathscr{D})$. Isso significa que $\mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{D})$, e concluímos que $\sigma(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{D})$. $\square$

APÊNDICE B

Este apêndice será dedicado a conceitos e resultados de Análise Real que foram utilizados no texto principal.

Definição B.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $b \in \mathbb{R}$ é cota superior de A quando, para todo $x \in A$, temos que $b \geq x$.*

Definição B.2. *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $b \in \mathbb{R}$ é supremo de A se b é cota superior de A e, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos que $x < b$ implica que x não é cota superior de A.*

Definição B.3. *Seja A subconjunto dos reais. Dizemos que uma coleção enumerável de intervalos abertos $\{G_i\}_{i\geq 1}$ é uma cobertura aberta de A se $A \subset \bigcup_{i\geq 1} G_i$. Se $\{G_i\}_{i\geq 1}$ possui um número finito de elementos, dizemos que a coleção é uma cobertura aberta finita de A.*

Definição B.4. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $\{G_i\}_{i\in C}$ uma cobertura aberta de A, com $C = \mathbb{N}$ ou $C = \{1, 2, \ldots, k\}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Se $B \subset C$ é tal que $A \subset \bigcup_{i\in B} G_i$, dizemos que $\{G_i\}_{i\in B}$ é uma subcobertura aberta de A.*

Teorema B.1. *Seja $[a, b]$ um intervalo real. Então, toda cobertura aberta $\{I_i\}_{i\geq 1}$ de $[a, b]$ possui uma subcobertura aberta finita.*

Demonstração. Seja E o conjunto de elementos $x \leq b$ do intervalo $[a, b]$ tais que $[a, x]$ possui uma subcobertura aberta finita. Como $a \in E$, pois $a \leq b$ e $[a, a] = \{a\}$, temos que o conjunto E não é vazio. E como b é cota superior de E, temos que E possui um supremo $c \in [a, b]$. Por c pertencer ao intervalo $[a, b]$, existe algum intervalo aberto $I \in \{I_i\}_{i\geq 1}$ tal que $c \in I$, e por I ser aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ está contido em I. Uma vez que c é supremo de E, $c - \varepsilon$ não é cota superior de E, e portanto existe $x > c - \varepsilon$ tal que $[a, x]$ tem como cobertura aberta uma subcoleção $\{I_1, ..., I_k\}$ de $\{I_i\}_{i\geq 1}$. Então a coleção $\{I_1, ..., I_k, I\}$ é cobertura aberta de $[a, c + \varepsilon)$. Portanto, todo ponto de $[c, c + \varepsilon)$ estaria em E se fosse menor ou igual que b. Mas como c é o único elemento desse intervalo que pode pertencer a E, temos que $c = b$ e a coleção $\{I_1, ..., I_k, I\}$ é cobertura aberta finita de $[a, b]$. $\square$

O teorema acima é um caso particular do Teorema de Heine-Borel. Como o usamos apenas na demonstração da Proposição 1.1 e somente para intervalos fechados, não se fez necessário incluir o teorema inteiro neste apêndice.

APÊNDICE C

Este apêndice será dedicado a propriedades de conjuntos que foram importantes para o texto principal.

Proposição C.1. *Sejam A, B e C subconjuntos dos reais. Então,*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C \cap B^c).$$

Demonstração. A demonstração segue do fato que

$$B \cup C = B \cup (C \cap B^c). \tag{C.1}$$

Temos então que

$$A \cap (B \cup C) \overset{(C.1)}{=} A \cap (B \cup (C \cap B^c)) = (A \cap B) \cup (A \cap C \cap B^c). \qquad \square$$

Proposição C.2. *Seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma coleção de conjuntos mutuamente disjuntos. Então,*

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right) \cap E_n = E_n \tag{C.2}$$

e

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right) \cap E_n^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right). \tag{C.3}$$

Demonstração. Como os E_i são mutuamente disjuntos,

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right) \cap E_n &= \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap E_n) \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (E_i \cap E_n) \right) \cup (E_n \cap E_n) \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \varnothing \right) \cup (E_n \cap E_n) \\
&= E_n,
\end{aligned}$$

provando (C.2).

Seja $D = (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)^c$. Então

$$E_i \cap D = \varnothing, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{C.4}$$

Já que $E_1, \ldots, E_n$ são mutuamente disjuntos, temos

$$E_i \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right) = E_i, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{C.5}$$

Já que $D, E_1, \ldots, E_n$ fazem partição de $\mathbb{R}$, temos

$$E_n^c = D \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right). \tag{C.6}$$

Note que

$$E_n \cap E_n^c = \varnothing, \tag{C.7}$$

mas, para $i = 1, \ldots, n-1$, temos

$$\begin{aligned} E_i \cap E_n^c &\overset{(C.6)}{=} E_i \cap \left(D \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right) \right) = (E_i \cap D) \cup \left(E_i \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right) \right) \\ &\overset{(C.4),(C.5)}{=} \varnothing \cup E_i = E_i \end{aligned} \tag{C.8}$$

onde na segunda equação usamos lei distributiva.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right) \cap E_n^c &= \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap E_n^c) \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (E_i \cap E_n^c) \right) \cup (E_n \cap E_n^c) \overset{(C.7),(C.8)}{=} \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right) \cup \varnothing \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right), \end{aligned}$$

onde na primeira equação usamos a lei distributiva. □

Proposição C.3. *Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de conjuntos e $(A_i)_{i \geq 1}$ uma sequência de conjuntos em $\mathscr{A}$. Então existe uma sequência $(B_i)_{i \geq 1}$ de conjuntos mutuamente disjuntos de $\mathscr{A}$ tal que*

$$\bigcup_{i \geq 1} B_i = \bigcup_{i \geq 1} A_i. \tag{C.9}$$

Demonstração. Se $(A_i)_{i \geq 1}$ for uma sequência finita, a prova é trivial. Portanto, suponha

$(A_i)_{i\geq 1}$ uma sequência infinita de conjuntos de $\mathscr{A}$. Defina a sequência $(B_i)_{i\geq 1}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1,\\
B_2 &= A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1^c,\\
B_3 &= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) = A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c,\\
&\vdots\\
B_n &= A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) = A_n \cap A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Por construção, $B_n \subset A_n$, com $n \in \mathbb{N}$. Como qualquer álgebra é fechada em complemento e em interseção finita, segue que $B_n \in \mathscr{A}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Agora, considere dois conjuntos B_m, B_n, com $m < n$. Então, $B_m \subset A_m$, e temos que

$$\begin{aligned}
B_m \cap B_n &\subset A_m \cap B_n\\
&= A_m \cap A_n \cap \cdots \cap A_m^c \cap \cdots\\
&= (A_m \cap A_m^c) \cap \cdots\\
&= \varnothing \cap \cdots\\
&= \varnothing.
\end{aligned}$$

Logo, $(B_i)_{i\geq 1}$ é uma sequência de conjuntos mutuamente disjuntos.

Como $B_i \subset A_i$,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Agora, considere $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Seja n o menor número natural tal que $x \in A_n$. Por construção, $x \in B_n$, e logo $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Segue que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

o que prova (C.9). □

Proposição C.4. *Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequencia infinita tal que*

$$E_{n+1} \subset E_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{C.10}$$

Seja

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \tag{C.11}$$

e seja

$$F_n = E_n \setminus E_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{C.12}$$

Então $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequencia de conjuntos mutualmente disjuntos e*

$$E_1 \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n. \tag{C.13}$$

Demonstração. Usando a notação

$$A_n = E_1 \cap E_n^c, \tag{C.14}$$

temos

$$\begin{aligned} E_1 \setminus E &\overset{(C.11)}{=} E_1 \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) = E_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right)^c = E_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c \right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_1 \cap E_n^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \end{aligned} \tag{C.15}$$

onde a segunda equação é justificada pela definição de diferença, na terceira é usada lei de Morgan, e na quarta lei distributiva.

Denotamos

$$B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{C.16}$$

Da demonstração da Proposição C.3, sabemos que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequencia de conjuntos mutualmente disjuntos e

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{C.17}$$

De (C.10), obtemos

$$E_n^c \subset E_{n+1}^c, \quad n \in \mathbb{N}$$

e depois

$$E_1 \cap E_n^c \subset E_1 \cap E_{n+1}^c, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Logo, usando (C.14), temos

$$A_n \subset A_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{C.18}$$

De (C.16) e (C.18), obtemos

$$B_n = A_n \setminus A_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{C.19}$$

De (C.10) segue que

$$E_1 \supset E_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$E_1 \cap E_n = E_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{C.20}$$

Temos

$$\begin{aligned} B_n &\overset{(C.19)}{=} A_n \setminus A_{n-1} \overset{(C.14)}{=} (E_1 \cap E_n^c) \setminus (E_1 \cap E_{n-1}^c) = (E_1 \cap E_n^c) \cap (E_1 \cap E_{n-1}^c)^c \\ &= E_1 \cap E_n^c \cap (E_1^c \cup E_{n-1}) = (E_1 \cap E_n^c \cap E_1^c) \cup (E_1 \cap E_n^c \cap E_{n-1}) \\ &= \varnothing \cup (E_1 \cap E_{n-1} \cap E_n^c) \overset{(C.20)}{=} E_{n-1} \cap E_n^c = E_{n-1} \setminus E_n \overset{(C.12)}{=} F_n, \end{aligned} \tag{C.21}$$

onde a terceira e a penúltima equações são justificadas pela definição de diferença, na quarta é usada lei de Morgan, e na quinta lei distributiva.

Juntando (C.15), (C.17) e (C.21), obtemos (C.13). $\square$