

Vitor Fernandes Rodrigues

**Uma Pandemia, a Probabilidade e Café:
Uma Prosa Sobre Percolação.**

Niterói - RJ, Brasil

21 de dezembro de 2022

Vitor Fernandes Rodrigues

**Uma Pandemia, a Probabilidade e
Café: Uma Prosa Sobre Percolação.**

Trabalho de Conclusão de Curso

Monografia apresentada para obtenção do grau de Bacharel em
Estatística pela Universidade Federal Fluminense.

Orientador(a): Prof. Dr. Jaime Antonio Utria Valdes

Niterói - RJ, Brasil

21 de dezembro de 2022

Vitor Fernandes Rodrigues

**Uma Pandemia, a Probabilidade e Café:
Uma Prosa Sobre Percolação.**

Monografia de Projeto Final de Graduação sob o título “*Uma Pandemia, a Probabilidade e Café: Uma Prosa Sobre Percolação.*”, defendida por Vitor Fernandes Rodrigues e aprovada em 21 de dezembro de 2022, na cidade de Niterói, no Estado do Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Jaime Antonio Utria Valdes
Departamento de Estatística – UFF

Prof. Dr. Valentin Sisko
Departamento de Estatística – UFF

Prof. Dr. Douglas Rodrigues Pinto
Departamento de Estatística – UFF

Niterói, 21 de dezembro de 2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

R696p Rodrigues, Vitor Fernandes
Uma Pandemia, a Probabilidade e Café: Uma Prosa Sobre
Percolação. / Vitor Fernandes Rodrigues. - 2022.
37 f.: il.

Orientador: Jaime Antonio Utria Valdes.
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação)-Universidade
Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística,
Niterói, 2022.

1. Ramificação. 2. Percolação. 3. Limitante superior. 4.
Limitante inferior. 5. Produção intelectual. I. Utria
Valdes, Jaime Antonio, orientador. II. Universidade Federal
Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III.
Título.

CDD - XXX

Para meu irmão Filipe, minha querida avó Talita e meus pais Teresa e Roque.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, meu Senhor e Redentor, pois sem Ele eu não seria capaz de fazer coisa alguma.

Agradeço a minha família. Meu irmão Filipe, por ser um dos meus melhores amigos e me dar forças quando preciso; minha avó Talita, por sempre puxar minha orelha e me ensinar seus valores; e meus pais Teresa e Roque por terem me amado desde meu nascimento, por me darem amor e me educarem da melhor maneira que eles encontraram.

Meus agradecimentos a Faculdade Federal Fluminense, por me dar essa oportunidade. Aos meus professores que conseguiram passar um pouco do conhecimento que eles possuem. Queria agradecer em especial ao Jaime que esteve presente em minha jornada desde o início da graduação, que foi meu orientador em Monitorias, Iniciação Científica e agora em meu Trabalho de Conclusão de Curso, agradeço por ser um excelente Orientador e já me desculpo por ter sido um péssimo Orientando.

Aos meus amigos, que sempre estiveram comigo em minhas necessidades e em minhas conquistas, agradeço por vocês. Aos que estiveram comigo no decorrer desse curso agradeço em especial a Ingrid, por ser a minha ouvinte em tremendas lamentações e por me dar forças; ao Matheus por me acolher no início da graduação, e por fazer esse caminho ser mais descontraído; e a Anna por estar presente sempre que precisei; a Carol e Patrícia por permanecerem firmes comigo no decorrer desse percurso. Aos que estiveram comigo no decorrer da vida, saiba que vocês foram de imensa importância, sem vocês eu não seria o que sou hoje, não citarei o nome de ninguém pois tenho certeza que minha memória falhará e esquecerei de alguém.

“Nunca te orgulhes de haver vencido a um adversário, ao que venceste hoje poderá derrotar-te amanhã. A única vitória que perdura é a que se conquista sobre a própria ignorância.”

Jigoro Kano

Resumo

Nessa monografia é feito um paralelo entre epidemia, e o porquê um surto viral pode vir a se transformar em uma pandemia, café e probabilidade, isto é, um estudo sobre Percolação. Para isso, foram expostos alguns conceitos preliminares sobre Funções Geradoras de Probabilidade, Processo de Ramificação, e Percolação, a fim de estudarmos um modelo epidêmico de Percolação de longo alcance em árvores homogêneas e em árvores alternadas.

Palavras-chave: epidemia, ramificação, percolação, comportamento crítico, limitante superior, limitante inferior.

Abstract

In this monograph, a parallel is made between epidemic, and why a viral outbreak can turn into a pandemic, coffee and probability, that is, a study on Percolation. For this, some preliminary concepts about Probability Generating Functions, Branching Process, and Percolation were exposed, in order to study an epidemic model of Long-range Percolation in Homogeneous Trees and Alternate Trees.

Keywords: epidemic, branching, percolation, critical behavior, upper bound, lower bound.

Lista de Figuras

| | | |
|---|---|-------|
| 1 | Passeio aleatório simples em \mathbb{Z} | p. 8 |
| 2 | Processo de Ramificação | p. 13 |
| 3 | Transição de Fases - Fase Supercrítica | p. 17 |
| 4 | Transição de Fases - Fase Subcrítica | p. 17 |
| 5 | Transição de Fases - Fase Crítica | p. 17 |
| 6 | Percolação de Discos | p. 22 |
| 7 | Funções $f_n(p)$ para diferentes valores de n e $d = 2$ | p. 26 |
| 8 | Ilustração da árvore homogênea (à esquerda) e alternada (à direita) | p. 32 |
| 9 | Processo de ramificação: caso alternado | p. 33 |

Sumário

| | | |
|----------|--|-------|
| 1 | Introdução | p. 3 |
| 1.1 | Denominador em Comum | p. 3 |
| 1.2 | Objetivos | p. 4 |
| 1.3 | Organização | p. 4 |
| 2 | Preliminares | p. 5 |
| 2.1 | Sequências e Séries | p. 5 |
| 2.2 | Função Geradora | p. 6 |
| 2.3 | Função Geradora de Probabilidade | p. 6 |
| 2.4 | Momentos | p. 11 |
| 3 | Processo de Ramificação | p. 13 |
| 3.1 | Processo de Ramificação | p. 13 |
| 3.2 | Probabilidade de Extinção | p. 14 |
| 3.3 | Condições para a Extinção e Transição de Fases | p. 16 |
| 4 | Modelo de Percolação de Bernoulli | p. 18 |
| 4.1 | Definições e notações | p. 19 |
| 4.2 | O Modelo de percolação de Bernoulli | p. 20 |
| 5 | Modelo Epidêmico na Árvore Homogênea | p. 21 |
| 5.1 | Definições e notações | p. 22 |
| 5.2 | Uma sequência de processos de ramificação dominada pela percolação de discos | p. 23 |

| | | |
|----------|--|-------|
| 5.2.1 | Comportamento Supercrítico do processo | p. 24 |
| 5.3 | Comparação com a prova apresentada em Lebensztayn e Rodriguez (2008) | p. 27 |
| 5.4 | O Caso Subcrítico | p. 28 |
| 6 | Modelo Epidêmico na Árvore Alternada | p. 31 |
| 6.1 | Comportamento Supercrítico e um Limitante Superior | p. 32 |
| 6.2 | Comportamento Subcrítico e um Limitante Inferior | p. 35 |
| 7 | Conclusão | p. 36 |
| | Referências | p. 37 |

1 Introdução

1.1 Denominador em Comum

De acordo com o Instituto Butantan, “uma enfermidade se torna uma pandemia quando atinge níveis mundiais; uma pandemia pode começar como um surto ou epidemia; ou seja, surtos, pandemias e epidemias têm a mesma origem - o que muda é a escala da disseminação da doença”. Em 2020, a COVID-19 assolou o mundo inteiro, pois seu potencial de contaminação era muito grande e fez com que essa doença se espalhasse rapidamente. Surgiu então a seguinte dúvida: “Por que essa doença se espalha tão rápido?”. Para responder essa pergunta, precisamos falar sobre Percolação.

Probabilidade é uma área da matemática em que estuda as chances de um evento ocorrer em uma determinada situação. “Quais são as chances de sair um número par quando jogamos um dado?”, isso é probabilidade. A resposta para pergunta anterior é fácil de ser respondida, mas se estendermos um pouco mais nossa imaginação podemos ver que algumas perguntas não são tão fáceis de serem respondidas. Agora, pense em redes de compartilhamento por exemplo, “Quais as chances do Facebook indicar um amigo de um amigo meu para ser meu amigo?”, ou “Sabendo que um amigo de um amigo meu possui uma doença infecciosa, quais as chances dele passar uma doença infecciosa para mim?”. Essas duas últimas perguntas são mais difíceis de serem respondidas, mas uma ferramenta muito importante que ajuda a responde-las é o estudo sobre Percolação.

Pegue um material poroso do qual queremos obter a parte solúvel de uma substância sólida, uma forma prática de fazer isso é passar um fluido (um solvente apropriado) lentamente pelos poros desse material. Esse é um hábito muito comum no cotidiano de muitas pessoas, o famoso “passar um café”. Se o café moído for colocado em um filtro de papel e em seguida adicionada água fervente, o líquido levará para longe os componentes solúveis dos grãos moídos. O nome desse fenômeno é Percolação. “Aliás, foi aí que a palavra percolação apareceu no começo do século XIX, no ensaio de Sir Benjamin Thomson (1753-1814), conhecido também como conde Rumford, um dos pais da Termodinâmica e

amante do café”.

Um bom café, uma epidemia e probabilidade, o fator em comum entre esses três tópicos é a Percolação. Fenômeno muito utilizado em diversas áreas como matemática, geologia, física, entre outras, possui aplicações muito interessantes como, por exemplo, o estudo de um surto viral. Dito isto, vamos destrinchar sobre esse assunto e entender um pouco mais como funciona.

1.2 Objetivos

Este trabalho visa entender a dinâmica da propagação de uma epidemia em uma rede conectada desde a ótica de percolação e processos de ramificação, para isso, nos propomos aos seguintes objetivos:

- Estudar um modelo de percolação de longo alcance proposto em [Lebensztayn e Rodriguez \(2008\)](#), tipicamente usado para modelar a propagação de uma epidemia.
- Entender o fenômeno de transição de fase através do modelo de percolação estudado.
- Apresentar uma nova prova para um limitante superior da probabilidade crítica do modelo sob estudo em Árvores Homogêneas.
- Apresentar uma prova para um limitante inferior da probabilidade crítica do modelo sob estudo em Árvores Homogêneas.
- Expandir os casos dos limitantes superior e inferior da probabilidade crítica do modelo sob estudo em Árvores Alternadas.

1.3 Organização

Este TCC será apresentado em sete capítulos. No Capítulo 1 são apresentados a motivação para este trabalho, uma breve revisão bibliográfica, e é explicitado os objetivos. A fundamentação teórica para a compreensão desse trabalho será dividida em quatro capítulos: Preliminares (Capítulo 2), o Processo de Ramificação (Capítulo 3), Modelo de Percolação de Bernoulli (Capítulo 4), e Modelo Epidêmico na Árvore Homogênea (Capítulo 5). No Capítulo 6 os conceitos e resultados obtidos na Árvore Homogênea serão estendidos para o caso de Árvore Alternada. Finalmente, no Capítulo 7 serão descritas as principais conclusões obtidas nesse estudo.

2 Preliminares

Antes de entrar em conceitos mais específicos, será necessário entender um pouco melhor conceitos básicos de matemática/probabilidade. Serão expostas as definições de Sequências e Séries, Função Geradora, Função Geradora de Probabilidade e Momentos.

2.1 Sequências e Séries

Sejam $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e \mathbb{R} , o conjunto dos números naturais, o conjunto dos inteiros não negativos e o conjunto dos números reais, respectivamente. Uma *sequência de números reais* $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que associa cada número natural n um número real $\alpha(n) = \alpha_n$. O valor α_n é chamado de termo n -ésimo da sequência. Geralmente usamos expressões da forma $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ para denotar essa sequência. Por vezes, definiremos uma sequência com domínio em \mathbb{N}_0 .

Por exemplo, definindo o n -ésimo termo de uma sequência como $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, neste caso podemos escrever $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ para representar a sequência de números reais $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$.

Dada uma sequência $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Definimos, uma *série numérica* como a sequência de somas parciais de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou seja, como a sequência $(S_n)_{n \geq 0}$, em que $S_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$, e é denotada como $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$.

Um bom exemplo é a constante de Euler (ferramenta matemática muito importante em diversas áreas como finanças, economia, física, engenharia, biologia, astronomia entre outras) que pode ser representada como a série em que $\alpha_n = \frac{1}{n!}$.

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

A continuação, definiremos um tipo especial de séries que permite *gerar* os termos de uma sequência.

2.2 Função Geradora

Seja $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ uma sequência de números reais, e seja uma série de potências da forma:

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k s^k.$$

Se existe $s_0 > 0$ tal que $F(s)$ converge em $|s| < s_0$, então $F(s)$ é chamada de *função geradora da sequência* $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Por exemplo, consideremos a expansão por série de Taylor da função exponencial ao redor do zero.

$$e^s = 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} s^k$$

Podemos verificar que essa série é função geradora da sequência $(\frac{1}{n!})_{n \in \mathbb{N}_0}$. Agora, pense em Probabilidade e em como podemos associar essa função.

2.3 Função Geradora de Probabilidade

Seja $(p_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ uma função de probabilidade em \mathbb{N}_0 , isto é, $p_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ e $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Definimos a função geradora de $(p_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ pela série de potências

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

Note que $G(s)$ converge se $|s| \leq 1$ e irá divergir para $|s| > 1$. Pela definição de $G(s)$, se X é uma variável aleatória discreta não-negativa, cuja função de probabilidade é dada por $(p_k)_{k \geq 0}$, ou seja, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, $k = 0, 1, \dots$, então $G(s) = \mathbb{E}(s^X)$.

Perceba que, como $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, então $G(1) = 1$ e a série converge para todo $s \in (-1, 1)$. Derivando $G(s)$ temos

$$G'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}.$$

Veja que

$$G'(1) = \mathbb{E}(X),$$

com esse pensamento pode-se achar o valor de $\text{Var}(X)$ por exemplo.

Como dito antes, $G(s)$ converge para todo $|s| \leq 1$ e diverge para $|s| > 1$. Dessa observação, temos que o *raio de convergência* de $G(s)$ é pelo menos 1. $G(s)$ pode ser derivada e integrada para valores menores que o valor do raio de convergência.

A seguir apresentaremos alguns exemplos de funções geradoras de probabilidade para algumas variáveis aleatórias conhecidas.

Exemplo 2.1. Se X for uma variável aleatória binomial de parâmetros n e p , o que indicaremos por $X \sim \text{Bin}(n, p)$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s^X) &= \sum_{k \geq 0} p_k s^k \\ &= \sum_{k=0}^n s^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (sp)^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Sabe-se que $(x + y)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ (Binômio de Newton). Então, faça $x = sp$ e $y = (1 - p)$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s^X) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (sp)^k (1-p)^{n-k} \\ &= [sp + (1 - p)]^n = G(s) \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Se X for uma variável aleatória geométrica de parâmetro p , o que indicaremos por $X \sim \text{Geo}(p)$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(s^X) &= \sum_{k \geq 0} p_k s^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} s^k p (1-p)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1} sp (1-p)^{k-1} \\
&= sp \sum_{k=1}^{\infty} [s(1-p)]^{k-1} \\
&= sp \frac{1}{1 - [s(1-p)]} \\
&= \frac{sp}{1 - s(1-p)}
\end{aligned}$$

Portanto, $G(s) = \frac{sp}{1-s(1-p)}$

O seguinte exemplo mostra como podemos obter a função geradora de probabilidade para o tempo de primeira passagem do passeio aleatório simples com morte em \mathbb{Z} .

Exemplo 2.3. (Passeio aleatório com morte em \mathbb{Z}) Considere uma partícula que se movimenta de acordo com um passeio aleatório simples e simétrico em \mathbb{Z} , isto é, dada uma sequência de variáveis aleatórias $(X_i)_{i \geq 1}$ independentes e identicamente distribuídas, tal que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2.$$

Para $x \in \mathbb{Z}$, definimos o passeio aleatório simples em \mathbb{Z} começando em x pela sequência, $(S_n^x)_{n \geq 0}$, com $S_0^x = x$ e $S_n^x = x + X_1 + \dots + X_n$. A Figura 1, a seguir ilustra essa situação (a partícula foi destacada em azul):

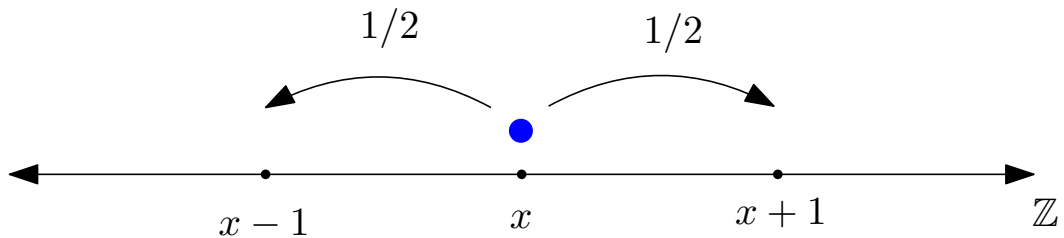


Figura 1: Passeio aleatório simples em \mathbb{Z}

Além disso, vamos supor que a partícula morra no instante τ , onde τ é uma variável

aleatória com distribuição geométrica de parâmetro $(1 - s)$, $s \in [0, 1)$, ou seja:

$$\mathbb{P}(\tau > k) = s^k, \quad s \in [0, 1).$$

Agora, defina $\Phi_n = \mathbb{P}(T(x, x + 1) = n)$, onde:

$$T(x, x + 1) = \inf\{n \geq 1 : S_n^x = x + 1\},$$

ou seja, $T(x, x + 1) = \inf\{n \geq 1 : S_n^x = x + 1\}$ é o tempo de primeira passagem em $x + 1$ de $(S_n^x)_{n \geq 0}$. Vamos calcular agora a função geradora de Φ_n . Com efeito,

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbb{E}(s^{T(x, x+1)}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(T(x, x+1) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \Phi_k \end{aligned}$$

Condicionando no primeiro passo de $(S_n^x)_{n \geq 0}$, temos

$$G(s) = \mathbb{E}(s^{T(x, x+1)}) = \sum_{y: |x-y|=1} \mathbb{E}(s^{T(x, x+1)} | S_1^x = y) \mathbb{P}(S_1^x = y). \quad (2.1)$$

Note que se $S_1^x = x - 1$, então:

$$\underbrace{T(x, x+1) = 1 + T(x-1, x) + T(x, x+1)}_{\text{tem a mesma distribuição}}.$$

Logo,

$$\mathbb{E}(s^{T(x, x+1)}) = s \cdot \mathbb{E}(s^{T(x-1, x)}) \cdot \mathbb{E}(s^{T(x, x+1)}). \quad (2.2)$$

Com (2.1) e (2.2), teremos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s^{T(x, x+1)}) &= \sum_{y: |x-y|=1} \mathbb{E}(s^{T(x, x+1)} | S_1^x = y) \mathbb{P}(S_1^x = y) \\ &= \frac{1}{2} [s + s(\mathbb{E}(s^{T(x, x+1)})^2)]. \end{aligned}$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}(s^{T(x,x+1)}) &= s + s(\mathbb{E}(s^{T(x,x+1)}))^2 \\ 0 &= s - 2\mathbb{E}(s^{T(x,x+1)}) + s(\mathbb{E}(s^{T(x,x+1)}))^2, \end{aligned}$$

resolvendo para $\mathbb{E}(s^{T(x,x+1)})$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s^{T(x,x+1)}) &= \frac{2 - \sqrt{4 - 4s^2}}{2s} \\ &= \frac{1 - \sqrt{1 - s^2}}{s}. \end{aligned}$$

Portanto, $G(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - s^2}}{s}$.

Apresentaremos a seguir algumas proposições importantes no estudo de funções geradoras de probabilidade, cujas demonstrações podem ser encontradas em [Grimmett e Welsh \(2014\)](#)

Proposição 2.1 (Singularidade). *Sejam X e Y variáveis aleatórias com função geradora de probabilidade G_X e G_Y respectivamente. Se $G_X = G_Y$, então $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k)$, para $k \in \mathbb{N}_0$.*

Proposição 2.2 (Soma Aleatória de Variáveis Aleatórias). *Se X_1, X_2, \dots é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e de mesma distribuição da variável aleatória X e com função geradora de probabilidade G_X , e se N é uma variável aleatória independente das demais variáveis aleatórias e tem função geradora de probabilidade G_N , então a soma $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ tem função geradora de probabilidade*

$$G_{X_1+X_2+\dots+X_N}(s) = G_N(G_X(s)).$$

A seguinte proposição justifica a razão pela qual a função $G(s)$ é chamada de função geradora de probabilidade.

Proposição 2.3. *Seja X uma variável aleatória tal que $\mathbb{P}(X = n) = p_n$, $n = 0, 1, \dots$ e função geradora de probabilidade $G(s)$, além disso denote por $G^{(n)}(s)$ a n -ésima derivada de $G(s)$, onde $G^{(0)}(s) = G(s)$, escrevemos também $G'(s)$ ao invés de $G^{(1)}(s)$. Então, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$*

$$p_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}.$$

Demonstração. Temos que,

$$G(s) = p_0 + s p_1 + s^2 p_2 + s^3 p_3 + \dots \quad (2.3)$$

Claramente, $G(0) = p_0$. Agora para $n = 1$, temos que

$$G'(s) = p_1 + 2s p_2 + 3s^2 p_3 + \dots$$

Logo, $G'(1) = p_1$, então, a proposição vale para $n = 1$.

De fato, derivando n -vezes a função $G(s)$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(s) &= \sum_{k \geq n} k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) s^{n-k} p_k \\ &= n(n-1)(n-2) \cdots (1) p_n + \sum_{k \geq n+1} k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) s^{n-k} p_k \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} G^{(n)}(0) &= n(n-1)(n-2) \cdots (1) p_n \\ &= n! p_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, $p_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$, como queríamos demonstrar. \square

2.4 Momentos

Um ponto importante para entender melhor uma distribuição é entender, por exemplo, a variabilidade dela, se ela é muito dispersa e sua simetria. Quando pensamos em esperança (média), pensamos em uma medida de posição central. Quando pensamos em variância, pensamos em dispersão. Há ainda como olhar a simetria e o achatamento dessas variáveis. Esses são casos de uma característica mais geral de uma variável aleatória: momentos.

Definição 2.1 (Momentos). *O k -ésimo momento de uma variável aleatória X , é definido como $\mathbb{E}(X^k)$ desde que essa quantidade exista.*

Definição 2.2. *Para uma variável aleatória X definimos o n -ésimo momento fatorial como $\mu_n = \mathbb{E}(X(X-1) \cdots (X-n+1))$. Em particular, quando $n = 1$, temos que $\mu_1 = \mathbb{E}(X)$.*

A seguinte proposição mostra como podemos relacionar os momentos de uma variável aleatória com sua função geradora de probabilidade.

Proposição 2.4. *Seja X uma variável aleatória com função geradora de probabilidade*

$G(s)$. Então, o n -ésimo momento fatorial é dado por

$$\mu_n = G^{(n)}(1). \quad (2.4)$$

Demonstração. Na prova da Proposição 2.3, vimos que

$$G^{(n)}(s) = \sum_{k \geq n} k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) s^{n-k} p_k$$

avaliando $G^{(n)}(s)$ em $s = 1$, o resultado segue. \square

3 Processo de Ramificação

3.1 Processo de Ramificação

Modelar um processo de reprodução ou um crescimento populacional é muito difícil, isso envolve muitas variáveis. Porém, no século XIX, Sir Francis Galton e Henry William Watson vieram a desenvolver uma abordagem muito mais simples, que viria a servir para esse assunto, e interessante de ser modelado, conhecido como Processo de Ramificação de Galton-Watson (ou Processo de Ramificação de Bienayme-Galton-Watson). A ideia, de forma informal, é basicamente: “Em um tempo inicial existe um indivíduo e ele pode gerar uma quantidade aleatória de filhos, depois dessa concepção se forma uma nova geração independente e a geração anterior morre. Como estaria essa população depois de n gerações?”.

Veja na Figura 2 por exemplo. Na geração inicial ($n = 0$), há apenas um indivíduo e ele gera três filhos para a próxima geração. A geração um ($n = 1$) gera seis filhos para a próxima geração e assim por diante.

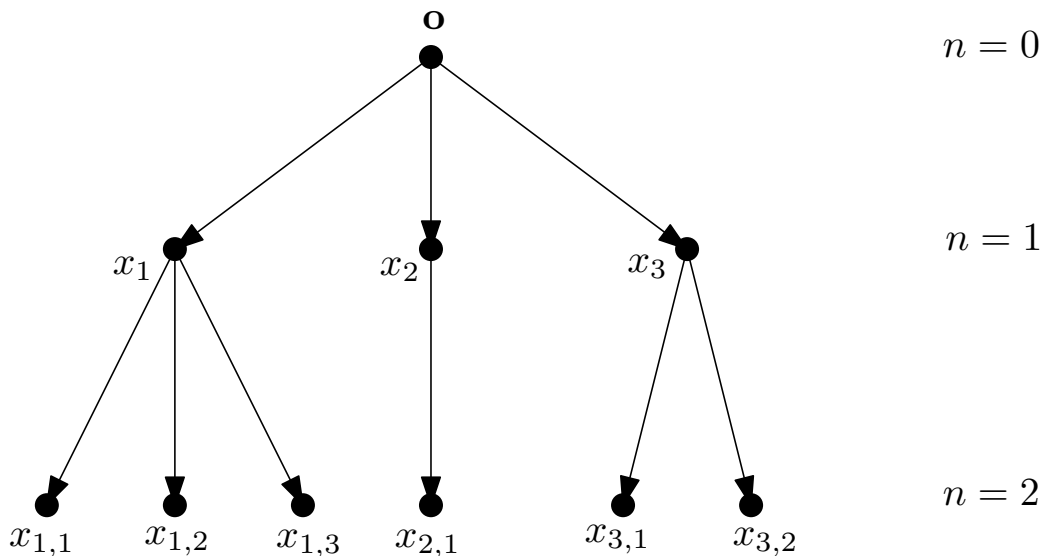


Figura 2: Processo de Ramificação

O processo pode ser descrito como segue:

- (i) Existe um único indivíduo no tempo inicial, $n = 0$.
- (ii) Todos os indivíduos vivem exatamente uma unidade de tempo, produzem X descendentes e morrem.
- (iii) O número de descendentes por indivíduo é uma variável aleatória X , assumindo valores em \mathbb{N}_0 e a probabilidade de produzir k descendentes é $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ e assumimos que os indivíduos se reproduzem de forma independente.
- (iv) Para $n \geq 0$, representamos por Y_n o número de indivíduos vivos no instante de tempo n . Logo, denotando por $X_{j,n-1}$ ao número de filhos do j -ésimo indivíduo da geração $(n - 1)$, temos que $Y_{n+1} = X_{1,n} + X_{2,n} + \dots + X_{Y_n,n}$, $n \geq 0$ e $Y_0 = 1$.
- (v) O processo de ramificação é definido pela sequência $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.
- (vi) Denotamos por $\mu = \mathbb{E}(X)$ ao número médio de filhos por indivíduo e por $G(s) = \mathbb{E}(s^X)$, $s \in [0, 1]$ à função geradora de probabilidade de X .

Para uma referência sobre o processo de ramificação citamos o livro de [Ross \(2014\)](#).

3.2 Probabilidade de Extinção

Muitas vezes ouve-se algo como “certo animal está em extinção”, o que isso quer dizer? Isso implica que se representamos por Y_n a população desse animal em certo instante de tempo n e temos que $Y_n = 0$ para algum n , significa que essa população foi extinta nesse tempo. Logo, $Y_m = 0$ para todo m maior que n . Como saber a probabilidade disso acontecer? Veja que podemos formalizar esse evento de extinção dessa população como segue, primeiro note que $Y_n = 0$, então $Y_m = 0$ para qualquer $m \geq n$. Então, denotando por

$$\begin{aligned} E &= \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} \{Y_m = 0\} \\ &= \bigcup_{n \geq 1} \{Y_n = 0\} \end{aligned}$$

Denote $\theta_n = \mathbb{P}(Y_n = 0 | Y_0 = 1)$, para qualquer $n \geq 0$ (perceba que $\theta_0 = 0$), condicionando o número de indivíduos na primeira geração, e pela independência, temos que

$$\begin{aligned}
\theta_{n+1} &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0 | Y_0 = 1) \\
&= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0 | Y_1 = k) \cdot \mathbb{P}(Y_1 = k | Y_0 = 1) \\
&= \sum_{k \geq 0} \left(\underbrace{\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0 | Y_1 = 1) \cdots \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0 | Y_1 = 1)}_{k\text{-vezes}} \right) \cdot p_k \\
&= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0 | Y_1 = 1)^k \cdot p_k \\
&= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Y_n = 0 | Y_0 = 1)^k \cdot p_k \\
&= \sum_{k \geq 0} \theta_n^k p_k \\
&= G(\theta_n).
\end{aligned}$$

Denote θ_∞ como a probabilidade de extinção. Em particular, temos, pela monotonicidade de $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, que

$$\begin{aligned}
\theta_\infty &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \{Y_n = 0\}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n.
\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de extinção é o limite da probabilidade de extinção na geração n . Logo, pela continuidade de G , concluímos que $\theta_\infty = G(\theta_\infty)$, isto é, a probabilidade de extinção é um ponto fixo de G .

Lema 3.1. *Temos que θ_∞ é a menor solução não negativa de $G(s) = s$ no intervalo $[0, 1]$.*

Demonstração. Aqui usaremos a relação $\theta_{n+1} = G(\theta_n)$. Agora, assumamos que $s \geq 0$ e $G(s) = s$, então $0 = \theta_0 \leq s$, como G é crescente temos que

$$\theta_1 = G(\theta_0) \leq s \Rightarrow \theta_2 = G(\theta_1) \leq s \Rightarrow \cdots \Rightarrow \theta_n = G(\theta_{n-1}) \leq s,$$

para todo n . Tomando $n \rightarrow \infty$ concluímos que $\theta_\infty = G(\theta_\infty) \leq s$. Logo, a probabilidade de extinção é a menor solução não negativa no intervalo $[0, 1]$ da equação $G(s) = s$. \square

3.3 Condições para a Extinção e Transição de Fases

Como saber se um processo irá se extinguir? Uma forma de saber o possível futuro de um processo é olhando o valor de μ (número médio de descendentes, isto é, $\mathbb{E}(Y)$). Uma forma de pensar é “se o número médio de descendentes é baixo (menor que um), então depois de um certo período a população irá diminuir ao ponto de se tornar extinta”. A partir desse pensamento que será feito essa análise, vamos olhar $\mu > 1$ (fase supercrítica), $\mu = 1$ (fase crítica), $\mu < 1$ (fase subcrítica).

Teorema 3.1. *Seja $(Y_n)_{n \geq 0}$ um processo de ramificação de Galton-Watson e assuma que $p_0 + p_1 < 1$, temos*

(i) *Se $\mu > 1$, $\theta_\infty < 1$, a extinção não é garantida. **Fase Supercrítica.***

(ii) *Se $\mu < 1$, $\theta_\infty = 1$, a extinção é garantida. **Fase Subcrítica.***

(iii) *Se $\mu = 1$, $\theta_\infty = 1$, a menos que o tamanho da família seja sempre constante em $Y = 1$. **Fase Crítica.***

Demonstração. Note que $G(s)$ possui as seguintes propriedades:

(i) $G(s)$ é crescente e estritamente convexa (sempre que $p_k > 0$ para algum $k \geq 2$).

(ii) $G(0) = p_0 \geq 0$ e $G(1) = 1$.

(iii) $G'(1) = \mu$, ou seja, a inclinação de $G(s)$ no valor $s = 1$ é igual a μ .

(iv) A probabilidade de extinção de θ_∞ é o menor valor maior ou igual a 0 tal que $G(s) = s$.

□

Caso(i): Quando $\mu > 1$, a curva $G(s)$ é forçado abaixo da linha $t = s$ em $s = 1$. A curva $G(s)$ tem que cruzar a linha $t = s$ novamente para encontrar o eixo t em $\mathbb{P}(Y = 0)$. Dessa forma, deve haver uma solução $\theta_\infty < 1$ à equação $G(s) = s$.

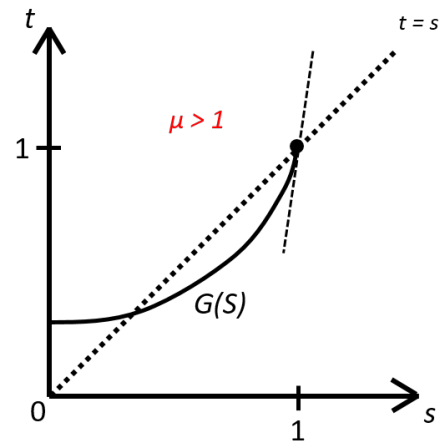


Figura 3: Transição de Fases - Fase Supercrítica

Caso(ii): Quando $\mu < 1$, a curva $G(s)$ é forçada acima da linha $t = s$ para $s < 1$. Não há possibilidade para a curva $G(s)$ para cruzar a linha $t = s$ novamente antes de encontrar o eixo t . Dessa forma, não pode haver solução menor que 1 para a equação $G(s) = s$, então $\theta_\infty = 1$. A exceção é onde Y pode levar apenas valores 0 e 1, então $G(s)$ não é estritamente convexo. No entanto, nesse caso $G(s) = p_0 + p_1s$ é uma linha reta, dando o mesmo resultado $\theta_\infty = 1$.

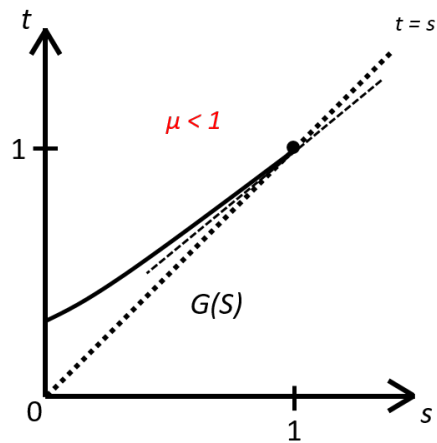


Figura 4: Transição de Fases - Fase Subcrítica

Caso (iii): Quando $\mu = 1$, a situação é a mesma como para $\mu < 1$. A exceção é onde Y leva apenas o valor 1. Então $G(s) = s$ para todos $0 \leq s \leq 1$, então a menor solução ≥ 0 é $\theta_\infty = 0$. Assim, a extinção é garantida para $\mu = 1$, a menos que $Y = 1$ com probabilidade 1.

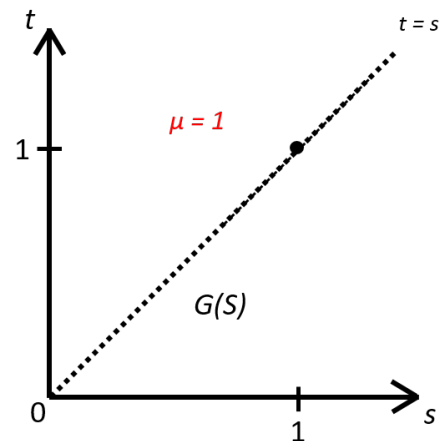


Figura 5: Transição de Fases - Fase Crítica

4 Modelo de Percolação de Bernoulli

Suponha que colocamos uma pedra dentro de um balde com água e a deixamos por um momento, quando a tirarmos será que o meio dela estará molhado? Qual a probabilidade disso acontecer? A água chegar ao centro de uma pedra depende muito da porosidade dela, existem materiais com diversos tipos de porosidades, mas na maioria dos casos essa probabilidade se resume a um ou zero.

A teoria da percolação foi introduzida por Broadbent e Hammersley, nos anos 50, como um modelo matemático de propagação em meios aleatórios. Broadbent e Hammersley discutiram a situação geral de “fluido” propagando-se aleatoriamente por um “meio” (onde os termos abstratos “fluidos” e “meio” devem ser apropriados de acordo com o contexto), o modelo concentra-se em descrever o meio poroso, que sera visto como uma rede de canais aleatórios, por onde escoar um fluido determinístico. Os processos de percolação são caracterizados por um limiar crítico, abaixo do qual a propagação do fluido está confinada em uma região finita. Um problema de grande interesse prático é a de água deslocando óleo em rochas porosas.

De maneira formal, suponha que os poros e os canais tenham uma disposição espacial regular, na forma de uma rede, em que os poros são os sítios e os canais os elos. Um exemplo comum é \mathbb{Z}^d ou um subconjunto, onde $d = 1, 2, \dots$ é a dimensão do meio, e seus elos ligando sítios vizinhos mais próximos. Suponha que cada canal esteja aberto ou fechado à passagem de um certo fluido e que esta característica seja atribuída de forma aleatória para cada canal, independente dos demais. Seja p a probabilidade de um certo canal esteja aberto. Vamos supor que p é o mesmo para todos os canais. Temos assim o modelo de percolação de Broadbent e Hammersley. Em $d = 3$, podemos imaginar o meio sendo uma rocha (mergulhada na água), ou uma placa de rocha, ou ainda uma porção de pó de café numa cafeteira (com água quente por cima ou vapor de água por baixo). Em $d = 2$, este seria um modelo para a difusão de uma epidemia numa região povoada ou

para a passagem de corrente de um chip eletrônico.

4.1 Definições e notações

Um grafo $G = (V, E)$ é dado por um conjunto V cujos elementos são chamados de *vértices*, e um subconjunto E de pares não ordenados de elementos em V , chamados de *elos*. Usualmente denotamos um elemento de E por e ou xy , onde $x, y \in V$ são entendidos como os extremos de e e dizemos que x e y são *vizinhos* e o denotamos por $x \sim y$. Definimos um *caminho* de tamanho n ligando x a y em G como uma sequência de vértices $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$, de modo que $x_i \sim x_{i+1}$ para qualquer $i = 0, \dots, n-1$ e dizemos que o tamanho do menor caminho conectando x e y é a *distância* entre x e y , denotada por $\text{dist}(x, y)$. O *grau* de $x \in V$, representado por $\text{deg}(x)$, é definido como o número de vizinhos de x . Um grafo $G = (V, E)$ é infinito se V e E são infinitos enumeráveis, *conectado* se para qualquer $u, v \in V$ existe um caminho entre u e v e localmente finito se para todo $x \in V$ $\text{deg}(x) < \infty$. Um grafo é dito de grau limitado se existe $0 < M < \infty$ tal que para todo $\text{deg}(x) \leq M$ para todo $x \in V$. O grau máximo de um grafo é definido por $\sup_{x \in V} \text{deg}(x) < \infty$, e um grafo H é um subgrafo de G se $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subset E(G)$ e cada $u, v \in E(H)$.

Um exemplo de grafo infinito, conectado e localmente finito é a rede hipercúbica d -dimensional, $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, onde $\mathbb{Z}^d = \{(x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, d\}$ e $\mathbb{E}^d = \{e = xy : \|x - y\|_1 = 1\}$, onde a distância entre $x = (x_1, \dots, x_d)$ e $y = (y_1, \dots, y_d)$ é

$$\text{dist}(x, y) = \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|.$$

Por um abuso típico de notação identificamos \mathbb{L}^d por seu conjunto de vértices \mathbb{Z}^d , assim algumas vezes nos referiremos a \mathbb{Z}^d como o grafo. Outro exemplo são as árvores, uma *árvore* é um grafo conectado e desprovido de ciclos, ou seja, para qualquer par de vértices $x, y \in V$ existe um único caminho ligando x e y . Em particular, a árvore homogênea de grau $d + 1$, denotada por $\mathbb{T}_d = (V, E)$ é a árvore em que $\text{deg}(x) = d + 1$ para todo vértice x .

4.2 O Modelo de percolação de Bernoulli

Seja $G = (V, E)$ um grafo infinito, conectado e localmente finito. Uma *configuração de percolação* $\omega = (\omega_e : e \in E)$ em G é um elemento de $\Omega = \{0, 1\}^E$. Se $\omega_e = 1$, dizemos que e está *aberto*, caso contrário dizemos que e está *fechado*. Uma configuração ω pode ser vista como um sub-grafo de G com conjunto de vértices V e conjunto de elos $E(\omega) = \{e \in E : \omega_e = 1\}$. Um *aglomerado* é definido como um componente conectado em ω . Um *modelo de percolação* é dado por uma distribuição de probabilidade sobre configurações de percolação em G . Aqui consideraremos, o caso mais simples em que a distribuição de probabilidade é uma distribuição de Bernoulli, ou seja, cada elo é aberto com probabilidade p ou fechado com probabilidade $1 - p$, independentemente dos estados dos outros elos. Dizemos que um caminho está aberto se todos os seus elos estão abertos. Para $x, y \in V$, escrevemos $x \leftrightarrow y$ se existe uma sequência finita de vértices $x = x_0, \dots, x_n = y$, tal que $\omega_{\{x_i, x_{i+1}\}} = 1$, $i = 0, \dots, n - 1$, ou seja, x e y estão conectados por um caminho de elos abertos.

Uma questão fundamental no modelo de percolação de Bernoulli, assim como em outros modelos de percolação mais gerais é a existência ou não de um aglomerado infinito. Definimos $C_x = \{y \in V : y \leftrightarrow x\}$ o conjunto de vértices que estão ligados a x por elos abertos, ou seja, é um conjunto de vértices que formam um “caminho” aberto. Se $x \in V$, a probabilidade de que x pertença a um aglomerado infinito é definido por

$$\theta(p, x) = \mathbb{P}(|C_x| = \infty) = \mathbb{P}(x \leftrightarrow \infty).$$

Sabe-se que $\theta(0, x) = 0$ e $\theta(1, x) = 1$ para qualquer que seja $x \in V$. Além disso, θ é uma função não decrescente em p . Podemos definir a probabilidade crítica associada ao vértice x como

$$p_c(x) = \inf\{p : \theta(p, x) > 0\}.$$

Dizemos que o modelo demonstra transição de fase se $p_c = p_c(x) \in (0, 1)$ para algum $x \in V$. Teremos três fases, fase supercrítica ($p > p_c$), fase crítica ($p = p_c$) e fase subcrítica ($p < p_c$). Mais detalhes podem ser encontrados em [Grimmett et al. \(1999\)](#), para referências na língua portuguesa veja [Lebensztayn \(2002\)](#) e [Fontes \(2000\)](#).

5 Modelo Epidêmico na Árvore Homogênea

Neste capítulo estudamos um modelo de percolação de longo alcance na árvore homogênea estudado em [Lebensztayn e Rodriguez \(2008\)](#) e generalizado em [Utria \(2015\)](#), conhecido na literatura como o *modelo de percolação de discos*, este modelo é usualmente usado para representar simplificadaamente a dinâmica de uma epidemia em uma rede conectada.

Para entender melhor, identificamos os vértices de $\mathbb{T}_d = (V, E)$ como indivíduos de uma certa comunidade, cada indivíduo da comunidade pode ser classificados em um de dois estados: *saudável* ou *infectado*. A cada indivíduo $x \in V$ associamos, de maneira independente, um raio de infecção R_x , tal que $\mathbb{P}(R_x = k) = p^k(1-p)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ onde $p \in [0, 1)$ é o parâmetro do modelo.

Dada uma realização da sequência de raios de infecção $(R_x)_{x \in V}$, a dinâmica do processo é descrita pelas seguintes regras:

1. No instante inicial, $n = 0$, existe um único indivíduo infectado, a raiz de \mathbb{T}_d .
2. No instante $n + 1$, o indivíduo y é infectado se existe x infectado no instante de tempo n , tal que $\text{dist}(x, y) \leq R_x$, onde $\text{dist}(x, y)$ é a distância entre x e y , ou seja, o número de elos no caminho conectando eles.
3. Indivíduos infectados permanecem infectados para sempre.

Devido a essa interpretação do modelo de percolação de discos, chamaremos a esse processo de modelo epidêmico.

Na Figura 6, apresentamos a ideia de uma realização do modelo de percolação de discos em \mathbb{T}_2 . A imagem da esquerda representa o caso em que há apenas um único indivíduo infectado (a raiz \bullet). A imagem do meio representa o caso em que $R_{\bullet} = 3$. Já

na imagem da direita ilustra o caso em que a infecção atinge todos os vértices a distância 4 da raiz.

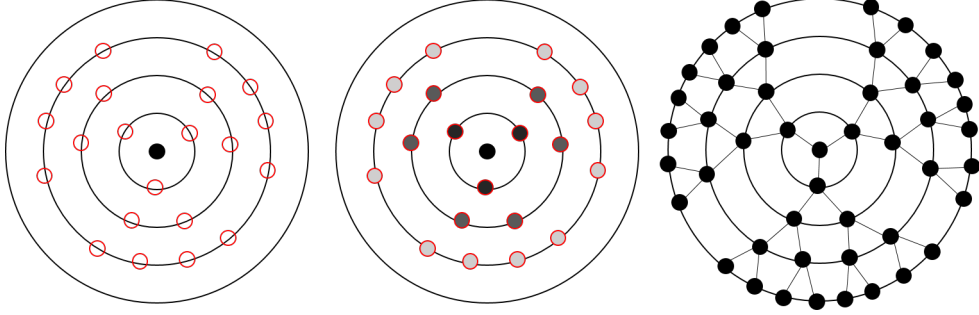


Figura 6: Percolação de Discos

5.1 Definições e notações

Seja $(R_x)_{x \in V}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, tal que $\mathbb{P}(R_x = k) = p^k(1-p)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ onde $p \in [0, 1)$ é um parâmetro fixado. Para $x \in V$, definimos

$$B_x = \{y \in V : \text{dist}(x, y) \leq R_x\},$$

como conjunto de indivíduos infectados por x , caso x tenha sido infectado. Agora, denotamos por $\{x \rightarrow y\} = \{y \in B_x\}$ o evento em que o indivíduo x infecta ao indivíduo y (no contexto de percolação seria que o elo orientado de x a y está aberto), caso contrário, escrevemos $x \nrightarrow y$ (ou seja, o elo orientado de x a y está fechado). Se existe uma sequência infinita $\mathbf{o} = x_0, x_1, x_2, \dots$ tal que $x_j \rightarrow x_{j+1}$ para todo $j \geq 0$ dizemos que ocorre percolação, ou equivalentemente, que a infecção se propagou para infinitos indivíduos e vamos denotar esse evento por $\mathbf{o} \rightarrow \infty$. Antes de ir mais para frente, note que estamos trabalhando com um modelo de percolação orientada, para isso, considere o grafo orientado $\vec{G}_d = (V, \vec{E})$ cujo conjunto de vértices V é o mesmo da árvore homogênea e cujo conjunto de elos orientados é definido por $\vec{E} = \{\vec{xy} : x, y \in V\}$, com a notação introduzida anteriormente dizemos que o elo orientado de x a y $\vec{xy} \in \vec{E}$ está aberto se $x \rightarrow y$, caso contrário dizemos que \vec{xy} está fechado.

Da definição do modelo, temos que

$$\mathbb{P}(x \rightarrow y) = p^{\text{dist}(x, y)}. \quad (5.1)$$

A principal quantidade de interesse é a *probabilidade crítica* do modelo, a saber

$$p_c(d) = \inf\{p : \mathbb{P}(\mathbf{o} \rightarrow \infty) > 0\}.$$

É bem sabido, veja [Lebensztayn e Rodriguez \(2008\)](#), que $p_c(d) \in (0, 1)$, isto é, o modelo exibe uma transição de fase em p .

A principal contribuição desse trabalho é apresentar uma prova mais simples de um limitante superior para $p_c(d)$ provado em [Lebensztayn e Rodriguez \(2008\)](#), além de fornecer uma interpretação probabilística para esse limitante superior, no sentido que definimos a sequência de processos aproximantes ao modelo de percolação, que levam ao limitante superior. A continuação, apresentamos o resultado (Teorema 10, em [Lebensztayn e Rodriguez \(2008\)](#), p. 2134).

Teorema 5.1. *Para qualquer $d \geq 2$,*

$$p_c(d) \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{d}\right)^{1/2}.$$

A prova do Teorema 5.1 será dividida nos seguintes três passos:

1. Definimos uma sequência de processos de ramificação dominada pela percolação de discos, no sentido que se o processo de ramificação sobrevive então, a percolação de discos percola.
2. Analisamos o comportamento supercrítico da sequência de processos de ramificação, isto leva, a uma sequência de limitantes superiores para $p_c(d)$.
3. Provamos que a sequência de limitantes superiores achada no passo anterior, converge para o limitante superior no Teorema 5.1.

5.2 Uma sequência de processos de ramificação dominada pela percolação de discos

Esta seção é devotada a definir uma sequência de processos de ramificação cuja sobrevivência implica na ocorrência de percolação no modelo epidêmico. A sequência é definida indutivamente, como segue: Considere x_0, \dots, x_n o único caminho conectando x_0 com x_n , de modo que $\text{dist}(x_0, x_n) = n \geq 1$. Além disso, escrevemos $x_n \in \partial(x_0)$ se x_0 é um vértice no caminho conectando a raiz \mathbf{o} de \mathbb{T}_d com x_n .

- Para $n = 1$, definimos

$$\{x_0 \xrightarrow{\text{pai}} x_1\} = \{x_0 \rightarrow x_1\}.$$

- Para $n \geq 2$, definimos

$$\{x_0 \xrightarrow{\text{pai}} x_n\} = \{x_0 \rightarrow x_n\} \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} \{x_0 \rightarrow x_k, x_0 \not\rightarrow x_{k+1}, x_k \xrightarrow{\text{pai}} x_n\}.$$

O evento $\{x_0 \xrightarrow{\text{pai}} x_n\}$ leia-se x_0 é pai de x_n .

Definição 5.1. Para cada $n \geq 1$, definimos um processo de ramificação, a tempo discreto, $(X_t^{(n)})_{t \geq 0}$ cuja família se reproduz de acordo à seguinte variável aleatória assumindo valores em $\{0, 1, \dots, d^n\}$.

$$\xi^{(n)} = \sum_{x_n: x_n \in \partial(x_0)} I(x_0 \xrightarrow{\text{pai}} x_n),$$

com um único indivíduo inicial (a raiz \mathbf{o}), isto é, $X_0^{(n)} = 1$.

5.2.1 Comportamento Supercrítico do processo

Nesta subseção analisaremos o comportamento supercrítico do processo $(X_t^{(n)})_{t \geq 0}$. Para isso, no próximo resultado calcularemos a probabilidade de um indivíduo ser pai de outro à distância n .

Lema 5.1. Seja x_0, \dots, x_n o único caminho conectando x_0 com x_n , de modo que $\text{dist}(x_0, x_n) = n \geq 1$. A probabilidade de x_0 ser pai de x_n é dada por

$$\mathbb{P}(x_0 \xrightarrow{\text{pai}} x_n) = g_n(p) = p^n(2-p)^{n-1}$$

.

Prova do Lema 5.2. Pela definição 5.1 e equação (5.1), temos que

$$\begin{aligned} g_n(p) &= \mathbb{P}(x_0 \xrightarrow{\text{pai}} x_n) = \mathbb{P}(x_0 \rightarrow x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} [\mathbb{P}(x_0 \rightarrow x_i) - \mathbb{P}(x_0 \rightarrow x_{i+1})] \mathbb{P}(x_i \xrightarrow{\text{pai}} x_n) \\ &= p^n + \sum_{i=1}^{n-1} (p^i - p^{i+1}) g_{n-i}(p) \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que $g_n(p)$ satisfaz a seguinte recursão:

$$\begin{aligned} g_1(p) &= p \\ g_{n+1}(p) &= p(2-p)g_n(p), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

De fato

$$\begin{aligned} g_{n+1}(p) &= p^{n+1} + \sum_{i=1}^n (p^i - p^{i+1})g_{n-i+1}(p) \\ &= p^{n+1} + (p - p^2)g_n(p) + \sum_{i=2}^n (p^i - p^{i+1})g_{n-i+1}(p) \\ &= p^{n+1} + p(1-p)g_n(p) + \sum_{i=1}^{n-1} (p^{i+1} - p^{i+2})g_{n-i}(p) \\ &= p^{n+1} + p(1-p)g_n(p) + p \left[\sum_{i=1}^{n-1} (p^i - p^{i+1})g_{n-i}(p) \right] \\ &= p \left[p^n + (1-p)g_n(p) + \sum_{i=1}^{n-1} (p^i - p^{i+1})g_{n-i}(p) \right] \\ &= p[g_n(p) + (1-p)g_n(p)] \\ &= pg_n(p)[1 + (1-p)] \\ &= p(2-p)g_n(p). \end{aligned}$$

Logo, fazendo recursão, teremos $g_n(p) = p^n(2-p)^{n-1}$, o que mostra o resultado. \square

A continuação, estabelecemos uma condição suficiente para o comportamento supercrítico de $(X_t^{(n)})_{t \geq 0}$.

Lema 5.2. *Para $n \geq 1$, seja $p_n(d)$ a única raiz em $(0,1)$ de $d^n g_n(p, d) = 1$. Se $p > p_n(d)$, então $(X_t^{(n)})_{t \geq 0}$ sobrevive com probabilidade positiva.*

Prova do Lema 5.2. Do Lema 5.1 e pela definição 5.1, temos que o número médio de descendentes por indivíduo, $\mathbb{E}(\xi^{(n)})$, é dado por $d^n g_n(p, d)$, o resultado segue pelo Teorema 3.1. \square

Agora, defina para $p \in [0, 1]$ e para cada $n \geq 1$ e $d \geq 2$ fixados as seguintes funções:

$$f_n(p, d) = \sqrt[n]{g_n(p)} - \frac{1}{d} \quad (5.2)$$

$$f(p, d) = p(2-p) - \frac{1}{d} \quad (5.3)$$

Na seguinte proposição, resumimos algumas propriedades simples de verificar das funções definidas em (5.2).

Proposição 5.1. *Para qualquer $d \geq 2$ e $n \geq 1$, temos que*

- (i) $f_n(0, d) < 0$ e $f_n(1, d) > 0$,
- (ii) $f_n(p, d)$ é crescente como função de p ,

Na Figura 7, mostramos algumas dessas funções para diferentes valores de n e $d = 2$.

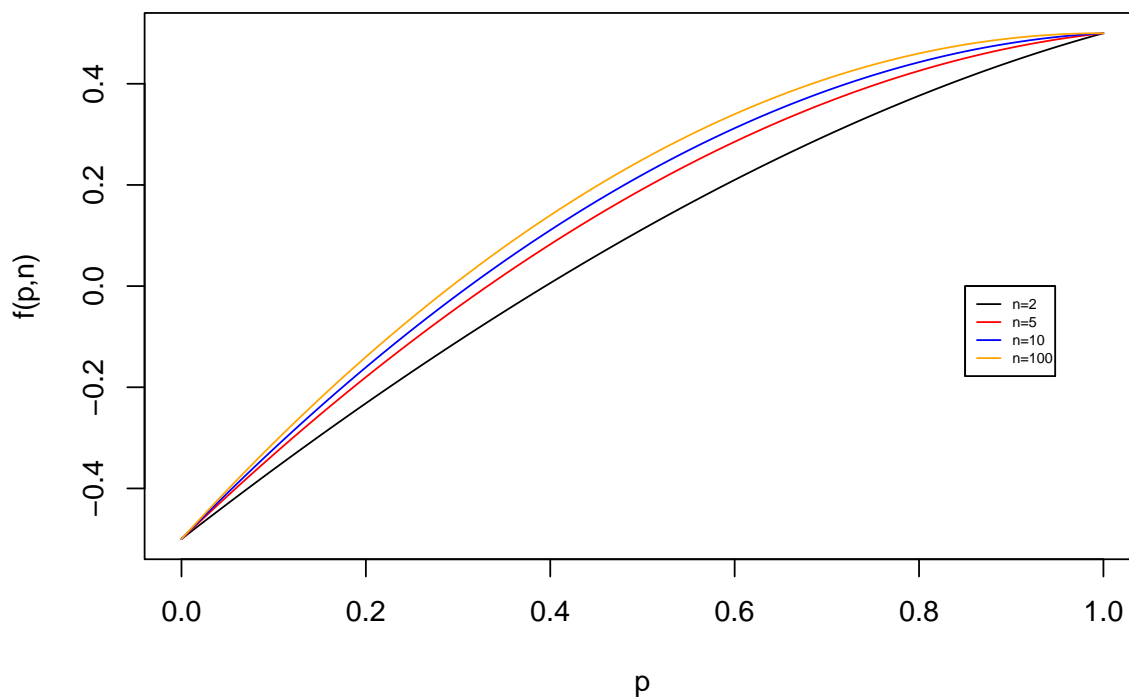


Figura 7: Funções $f_n(p)$ para diferentes valores de n e $d = 2$.

O próximo resultado será útil na prova do Teorema 5.1.

Lema 5.3. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ uma sequência de funções crescentes, contínuas a valores reais definidas em $[0, 1]$, tal que $f_n(0) < 0$ e $f_n(1) > 0$ para qualquer n . Além disso, suponha que (f_n) convirja pontualmente para uma função crescente e contínua f definida em $[0, 1]$ quando $n \rightarrow \infty$ e seja p_n a única raiz de f_n em $[0, 1]$. Então, existe $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ e $f(p) = 0$*

Prova do Teorema 5.1. Temos que as funções definidas em (5.2) e (5.3) satisfazem as condições do Lema 5.3. Além disso, note que se $f_n(p, d) > 0$ então o processo $(X_t^{(n)})_{t \geq 0}$ sobrevive com probabilidade positiva (c.p.p.), conseqüentemente o modelo epidêmico percola c.p.p. Assim, a condição $p > p_n(d)$ garante a ocorrência de percolação e temos que

$$p_c(d) \leq p_n(d). \quad (5.4)$$

Finalmente, fazendo $n \rightarrow \infty$ e usando o Lema 5.3, obtemos

$$p_c(d) < 1 - \left(1 - \frac{1}{d}\right)^{1/2}.$$

□

5.3 Comparação com a prova apresentada em *Lebensztayn e Rodriguez (2008)*

A prova do Teorema 5.1 apresentada em *Lebensztayn e Rodriguez (2008)* pode ser resumida como segue:

1. Definimos uma seqüência de processos de ramificação dominada pela percolação de discos, no sentido que se o processo de ramificação sobrevive então, a percolação de discos percola.
2. Desde que não foi possível encontrar explicitamente o valor crítico dos processos de ramificação definidos no passo 1, teve-se à necessidade de limitar a inferiormente o número médio de descendentes por indivíduo nesses processos, isto leva, à obtenção da seqüência $p_n(d)$, tal que $p_c(d) \leq p_n(d)$.
3. Provamos que a seqüência de limitantes superiores, $p_n(d)$, converge para o limitante superior no Teorema 5.1.

No passo 1, a seqüência de processos de ramificação é definida diferente do modo que é apresentada aqui. Todavia, a Definição 5.1 pode ser considerada, em certo sentido, como um caso particular da apresentada em *Lebensztayn e Rodriguez (2008)*.

No passo 2, o limitante inferior para o número médio de descendentes por indivíduo é justamente $d^n g_n(p)$. Esse é o passo crucial da demonstração, em nossa abordagem

não é necessário limitar o número médio de descendentes por indivíduo o que simplifica a demonstração, além de fornecer uma interpretação probabilística para o limitante superior achado.

5.4 O Caso Subcrítico

Agora nosso foco é entender o comportamento subcrítico e encontrar um limitante inferior para $p_c(d)$.

Teorema 5.2. *Para qualquer $d \geq 2$, temos*

$$p_c(d) \geq -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{d}}.$$

Para provar o Teorema 5.2, vamos definir um processo de ramificação que domina a percolação de discos, no sentido que se o processo de ramificação morre, então a percolação de discos também morre.

- Para $x \in V$, considere:

$$I_x = \{y \in V : x \rightarrow y, x \neq y\}, \text{ e}$$

$$I_{\mathbf{o}} = \{x \in V \setminus \{\mathbf{o}\} : \mathbf{o} \rightarrow x\}.$$

- Defina a geração inicial (no tempo $n = 0$) por:

$$\eta_{\mathbf{o}} = |I_{\mathbf{o}}| \text{ (tamanho de } I_{\mathbf{o}}\text{), } \mathbf{o} \text{ é raiz de } \mathbb{T}_d.$$

- Defina para $x \neq \mathbf{o}$ a variável aleatória

$$\eta_x = |I_x| - \mathbf{1}\{x \rightarrow x'\},$$

onde $x' \sim x$ tal que x' pertence ao caminho conectando \mathbf{o} com x .

A prova do Teorema 5.2 será dividida em dois passos:

1. O primeiro passo é mostrar que $|I_{\mathbf{o}}| < \infty$ quase certamente (q.c.). $[\mathbb{E}(x) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(x < \infty) = 1]$.

2. O segundo passo é calcular $\mathbb{E}(\eta_x)$ e achar para que valores de p , tal que $\mathbb{E}(\eta_x) < 1$.
 $[p < p(d) \Rightarrow \mathbb{E}(\eta_x) < 1]$.

Prova do Teorema 5.2. Primeiro Passo: Seja I_x e $I_{\mathbf{o}}$ definidos anteriormente, então teremos:

$$\begin{aligned} |I_{\mathbf{o}}| &= \sum_{x \in V \setminus \{\mathbf{o}\}} \mathbf{1}\{\mathbf{o} \rightarrow x\} \Rightarrow \\ \mathbb{E}(|I_{\mathbf{o}}|) &= \sum_{x \in V \setminus \{\mathbf{o}\}} \mathbb{E}(\{\mathbf{o} \rightarrow x\}) \\ &= \sum_{x \in V \setminus \{\mathbf{o}\}} \mathbb{P}(\mathbf{o} \rightarrow x). \end{aligned}$$

Desta forma, teremos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\eta_{\mathbf{o}}) &= \mathbb{E}(|I_{\mathbf{o}}|) = \sum_{x \in V \setminus \{\mathbf{o}\}} \mathbb{P}(\mathbf{o} \rightarrow x) \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{x: \delta(\mathbf{o}, x) = n} \mathbb{P}(\mathbf{o} \rightarrow x) \\ &= \sum_{n \geq 1} (d+1)d^{n-1}p^n \\ &= (d+1)p \sum_{n \geq 0} (dp)^n. \end{aligned}$$

Converge se somente se $p < \frac{1}{d}$. Para $p < \frac{1}{d}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|I_{\mathbf{o}}| &= (d+1)p \frac{1}{1-pd} \\ &= \frac{pd+p}{1-pd}. \end{aligned}$$

Veja que $\mathbb{E}|I_{\mathbf{o}}| = \frac{pd+p}{1-pd} < 1$ para todo $p < \frac{1}{d}$, então $|I_{\mathbf{o}}| < \infty$ quase certamente.

Segundo Passo: Para $x \neq \mathbf{o}$, temos a variável aleatória η_x definida anteriormente. Então, teremos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\eta_x) &= \mathbb{E}(|I_x|) - \mathbb{P}(x \rightarrow x') \\
&= \mathbb{E}(|I_o|) - p, \text{ para } p < \frac{1}{d} \\
&= \frac{pd + p}{1 - pd} - p \\
&= \frac{pd(1 + p)}{1 - pd}.
\end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned}
\frac{pd(1 + p)}{1 - pd} < 1 &\Leftrightarrow pd(1 + p) < 1 - pd \\
&\Leftrightarrow p^2d + 2pd - 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow p^2 + 2p - \frac{1}{d} < 0 \\
&\Leftrightarrow p = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + \frac{4}{d}}}{2} < 0 \\
&\Leftrightarrow p = \frac{-2 + \sqrt{4 + \frac{4}{d}}}{2} < 0, p > 0 \\
&\Leftrightarrow p < \sqrt{1 + \frac{1}{d}} - 1.
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}(\eta_x) < 1$ para $p < \sqrt{1 + \frac{1}{d}} - 1$. Portanto,

$$p_c(d) \geq -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{d}}.$$

□

6 Modelo Epidêmico na Árvore Alternada

Até aqui vimos o caso mais simples de um modelo de percolação, o de árvores homogêneas. Ou seja, vimos o modelo epidêmico mais básico até agora. Mas, na vida real (na maioria das vezes), nada é tão básico assim, inúmeras doenças se espalham de forma diferente de indivíduo para indivíduo. Por exemplo, em um artigo publicado na plataforma medRxiv, em 2021, mostrou que os homens contraíam e transmitiam a Covid-19 mais que as mulheres, isso quer dizer que em uma sociedade a variável sexo possui diferentes formas de transmissão. Imagina olhar para todas as variáveis relevantes para cada doença?

Uma forma de generalizar o que vimos até aqui, mas sem uma interpretação muito complexa, é olhar o caso de uma árvore alternada. Ao invés de olharmos para \mathbb{T}_d , agora olharemos para $\mathbb{T}_{a,b}$, em que a estará associado aos vértices *pares* e b aos vértices *ímpares*. Mais precisamente, definimos a árvore $\mathbb{T}_{a,b}$ como árvore cujos vértices a distância par da raiz tem grau $a + 1$ e vértices a distância ímpar da raiz tem grau $b + 1$. Na Figura 8 à esquerda podemos ver uma parte da árvore homogênea, \mathbb{T}_2 e uma parte da árvore alternada $\mathbb{T}_{2,3}$ à direita.

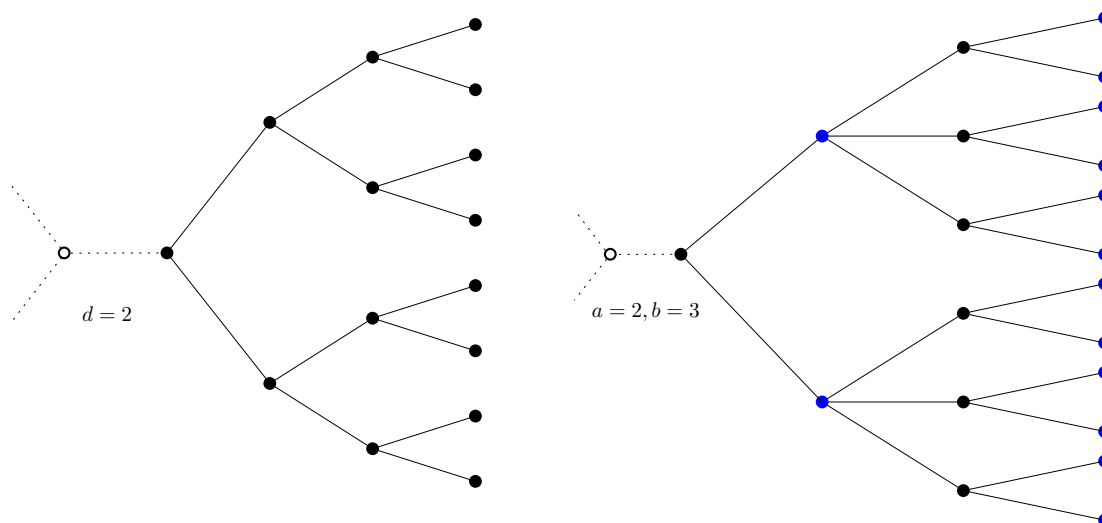


Figura 8: Ilustração da árvore homogênea (à esquerda) e alternada (à direita)

6.1 Comportamento Supercrítico e um Limitante Superior

Nesta seção, definiremos um processo de ramificação dominado pela percolação de discos em $\mathbb{T}_{a,b}$. Uma forma prática de pensar é fazer um “conjunto de blocos” de tamanho $2n$ ao invés de n , ou seja, cada geração “começará” nos vértices pares.

Formalmente, definimos:

(i) Para $n = 1$

$$\{x_0 \xrightarrow{\text{pai}} x_2\} = \{x_0 \rightarrow x_2\}$$

(ii) Para todo $n \geq 2$:

$$\{x_0 \xrightarrow{\text{pai}} x_{2n}\} = \{x_0 \rightarrow x_{2n}\} \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} \{x_0 \rightarrow x_{2k}, x_0 \not\rightarrow x_{2k+2}, x_{2k} \xrightarrow{\text{pai}} x_{2n}\}.$$

Semelhante ao caso homogêneo, consideramos um processo de ramificação começando com a raiz e cujos indivíduos se reproduzem de acordo à variável aleatória:

$$\chi^{(n)} = \sum_{x_{2n} \in \partial(x_0)} I(x_0 \xrightarrow{\text{pai}} x_{2n}).$$

Repare que neste caso, estamos ignorando a contribuição dos indivíduos infectados a distância ímpar da raiz, isso permite definir um processo de ramificação simples, como no

caso da árvore homogênea. Na Figura 9 ilustramos a definição do processo de ramificação em $\mathbb{T}_{2,3}$ para o caso $n = 1$.

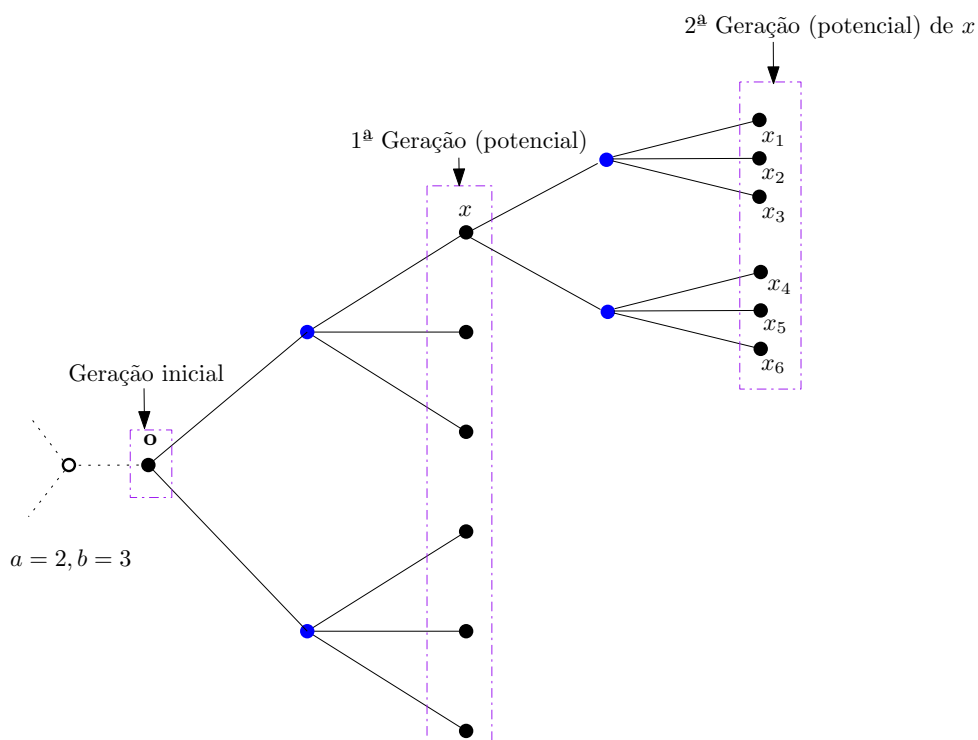


Figura 9: Processo de ramificação: caso alternado

Agora, enunciamos o resultado principal deste capítulo:

Teorema 6.1. *Para qualquer a, b inteiros não negativos, com $a \geq 2$ ou $b \geq 2$, temos*

$$p_c(\mathbb{T}_{a,b}) \leq \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{ab}}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.1)$$

Enfatizamos, que o limitante obtido em (6.1) é um novo resultado.

Prova do Teorema 6.1. Seja $g_n(p) = \mathbb{P}(x_0 \xrightarrow{pai} x_{2n})$, então:

$$\begin{aligned} g_n(p) &= \mathbb{P}(x_0 \xrightarrow{pai} x_{2n}) \\ &= \mathbb{P}(x_0 \rightarrow x_{2n}) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\mathbb{P}(x_0 \rightarrow x_{2k}) - \mathbb{P}(x_0 \rightarrow x_{2k+2}) \right) \mathbb{P}(x_{2k} \rightarrow x_{2n}) \\ &= p^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} (p^{2k} - p^{2k+2}) g_{n-k}(p). \end{aligned}$$

Perceba que

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(p) &= p^{2n+2} + \sum_{k=1}^n (p^{2k} - p^{2k+2})g_{n-k+1}(p) \\
&= p^{2n+2} + (p^2 - p^4)g_n(p) + \sum_{k=2}^n (p^{2k} - p^{2k+2})g_{n-k+1}(p) \\
&= p^2 \left[p^{2n} + (1 - p^2)g_n(p) + \sum_{k=1}^{n-1} (p^{2k} - p^{2k+2})g_{n-k}(p) \right] \\
&= p^2 \left[g_n(p) + (1 - p^2)g_n(p) \right] \\
&= p^2 \left[g_n(p)(1 + 1 - p^2) \right] \\
&= p^2(2 - p^2)g_2(p).
\end{aligned}$$

Então, por recursão, temos

$$\begin{aligned}
g_n(p) &= (p^2)^n(2 - p^2)^{n-1} \\
&= p^{2n}(2 - p^2)^{n-1} = \mathbb{P}(x_0 \xrightarrow{pai} x_{2n}).
\end{aligned}$$

Agora, defina para $p \in [0, 1)$ as seguintes funções:

$$f_n(p, a, b) = f_n(p) = [g_n(p)]^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{ab}, \quad (6.2)$$

$$f(p, a, b) = f(p) = p^2(2 - p^2) - \frac{1}{ab}. \quad (6.3)$$

Temos que as funções f_n e f satisfazem as condições no Lema 5.3. Além disso, note que se $f_n(p, a, b) > 0$ então o processo sobrevive com probabilidade positiva, conseqüentemente o modelo epidêmico percola com probabilidade positiva. Para achar o limitante superior para $p_c(\mathbb{T}_{a,b})$ basta analisar os zeros de $f(p, a, b)$. Para isso, fazemos a substituição:

$$u = p^2 \Leftrightarrow u^{\frac{1}{2}} = p. \quad (6.4)$$

Logo,

$$f(p, a, b) = 0 \Leftrightarrow abu(2 - u) = 1 \quad (6.5)$$

$$\Leftrightarrow abu^2 - 2abu + 1 = 0 \quad (6.6)$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 2u + \frac{1}{ab} = 0. \quad (6.7)$$

Resolvendo a equação quadrática (6.7), temos que

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{4 - \frac{4}{ab}}}{2} \Leftrightarrow u = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{ab}}. \quad (6.8)$$

Como $p < 1 \Rightarrow u < 1$, assim a solução desejada é

$$u = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{ab}}.$$

Agora, usando (6.4), temos

$$p = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{ab}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Consequentemente o resultado segue. \square

6.2 Comportamento Subcrítico e um Limitante Inferior

A fim de estabelecer um limitante inferior para a probabilidade crítica do modelo na árvore $\mathbb{T}_{a,b}$ usaremos o seguinte resultado provado em [Lebensztayn e Rodriguez \(2008\)](#).

Proposição 6.1. *Suponha que G é um grafo de grau máximo $\Delta < \infty$. Então*

$$p_c(G) \geq -1 + \left(1 + \frac{1}{\Delta - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Observe que o fato de G ser conectado implica em $\Delta > 1$.

Como consequência da Proposição 6.1, temos que

Proposição 6.2. *Para qualquer $a \geq 2$ ou $b \geq 2$, temos que*

$$p_c(\mathbb{T}_{a,b}) \geq -1 + \left(1 + \frac{1}{\max(a+1, b+1) - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

7 Conclusão

No decorrer do texto percebemos que uma doença infecciosa, probabilidade e café possuem uma coisa muito importante em comum: Percolação. Foi destrinchado sobre o conceito de Processo de Ramificação, Probabilidade de Extinção, Percolação e Percolação de Discos, para enfim analisar o comportamento Supercrítico e Subcrítico do processo.

O primeiro estudo se baseou em Árvores Homogêneas, e analisando comportamento Supercrítico de um Processo de Ramificação desenvolvemos um limitante superior. A grande diferença vista nesse desenvolvimento em comparação com o visto em [Lebensztayn e Rodriguez \(2008\)](#) é em nossa abordagem não é necessário limitar o número médio de descendentes por indivíduo o que simplifica a demonstração, além de fornecer uma interpretação probabilística para o limitante superior achado. Para o limitante inferior definimos um Processo de Ramificação Subcrítico que domina a Percolação de Discos no caso Homogêneo.

O segundo estudo tratou de um problema mais complexo, vimos o caso de Árvores Alternadas. Para o caso do limitante superior estendemos o conceito que foi visto no estudo do limitante superior em Árvores Homogêneas, e para o caso do limitante inferior usamos um resultado previamente demonstrado em [Lebensztayn e Rodriguez \(2008\)](#).

Sabemos que mundo real é muito mais complexo, possui muitas variáveis e nem todas funcionam da mesma forma para um mesmo indivíduo. Para um trabalho a nível graduação, com um nível teórico regular, nos restringimos aos casos de Árvores Homogêneas e Árvores Alternadas. Mas vale ressaltar que um estudo mais aprofundado poderia abranger o conceito de Modelos de Percolação de Cone, assim como o de Árvores Aleatórias.

Referências

FONTES, L. Percolação, um modelo simples (e interessante) para um meio poroso. *Matemática Universitária. Brasil*, v. 28, p. 1–17, 2000.

GRIMMETT, G.; WELSH, D. *Probability: an introduction*. [S.l.]: Oxford University Press, 2014.

GRIMMETT, G. R. et al. *Percolation*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999. v. 321.

LEBENSZTAYN, É. *O modelo de percolação em grafos: Um estudo de condições para a transição de fase do parâmetro crítico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2002.

LEBENSZTAYN, E.; RODRIGUEZ, P. The disk-percolation model on graphs. *Statistics & probability letters*, Elsevier, v. 78, n. 14, p. 2130–2136, 2008.

ROSS, S. M. *Introduction to probability models*. [S.l.]: Academic press, 2014.

UTRIA, J. *Transição de Fase para um Modelo de Percolação Dirigida na Árvore Homogênea*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2015.